بیوگراوند
مجری عدالت آموزشی در سرزمین عزیزمان ایران
دانلود رایگان بانک تست تمام دروس تجربی در :
@BioGeravand
www.BioGeravand.ir

مدرسه گروه آموزشی بیوگراوند | پایه دوازدهم تجربی | زمان ۱۸ دقیقه | منبع: کنکور سراسری
درس ریاضی | مبحث کاربرد مشتق (فصل ۵ دوازدهم) | شماره آزمون سری اول (سوالات کنکور)

۱

گزینه ۲

نقاط بحرانی تابع را در فاصلهٔ $[-۴,۳]$ به دست می‌آوریم.

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}-۱۵x \Rightarrow f'(x)=x^{۲}-۲x-۱۵$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} x^{۲}-۲x-۱۵=(x-۵)(x+۳)=۰$$

x		-۳		۵	
f'	+	۰	−	۰	+
	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$[-۴,۳] \text{ نقاط بحرانی تابع در بازهٔ } = -۳,-۴,۳$$

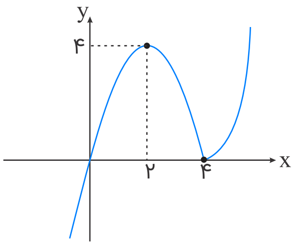
$$\left.\begin{aligned} f(-۴)&=-\frac{۶۴}{۳}-۱۶+۶۰=\frac{۶۸}{۳}\\ f(-۳)&=\frac{(-۳)^{۳}}{۳}-۹+۴۵=۲۷\\ f(۳)&=\frac{۳^{۳}}{۳}-۹-۴۵=-۴۵\end{aligned}\right\} \xrightarrow{x\in[-۴,۳]} \begin{cases} y_{min}=-۴۵\\ y_{max}=۲۷\end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۲ گزینه ۴

$$f(x)=x|x-۴|=\begin{cases}x^۲-۴x & ;x\geq ۴\\ ۴x-x^۲ & ;x<۴\end{cases}$$

نمودار این تابع به صورت زیر است:



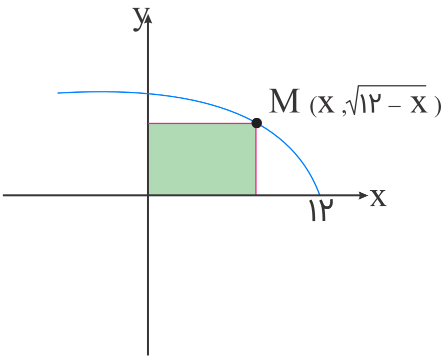
این تابع در $(۴,۰)$ مینیمم نسبی و در $(۲,۴)$ ماکزیمم نسبی دارد. فاصلهٔ آن‌ها برابر است با:

$$\sqrt{(۲-۴)^۲+(۴-۰)^۲}=\sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

گزینه ۳

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



مساحت مستطیل ساخته‌شده برابر $S(x) = x\sqrt{۱۲ - x}$ است.

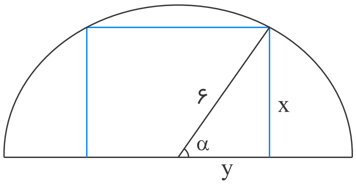
$$S' = \sqrt{۱۲ - x} - \frac{x}{۲\sqrt{۱۲ - x}} = ۰ \Rightarrow \frac{۲(۱۲ - x) - x}{۲\sqrt{۱۲ - x}} = ۰$$

$$۲۴ - ۲x - x = ۰ \Rightarrow x = ۸ \Rightarrow S_{max} = ۸\sqrt{۱۲ - ۸} = ۱۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۴ گزینه ۴

راه‌حل اول:

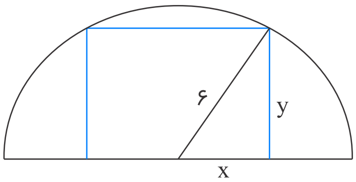


$$\sin\alpha = \frac{x}{۶} \Rightarrow x = ۶\sin\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{y}{۶} \Rightarrow y = ۶\cos\alpha$$

مساحت مستطیل : $S = x\,(۲y) = ۲\,(۳۶)\sin\alpha\cos\alpha = ۳۶\sin ۲\alpha$

مساحت وقتی ماکزیمم است که $\sin ۲\alpha = ۱$ باشد. بنابراین: $S_{max} = ۳۶$

راه‌حل دوم:



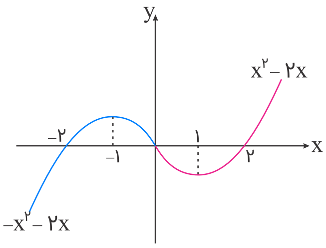
$$x^۲ + y^۲ = ۳۶ \Rightarrow y = \sqrt{۳۶ - x^۲}$$
$$S = ۲xy = ۲x\sqrt{۳۶ - x^۲}$$
$$S' = ۲\sqrt{۳۶ - x^۲} + \frac{-۴x^۲}{۲\sqrt{۳۶ - x^۲}} = ۰$$
$$\Rightarrow x^۲ = ۳۶ - x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱۸ \Rightarrow x = ۳\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow y = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$
$$S_{max} = ۲ \times ۳\sqrt{۲} \times ۳\sqrt{۲} = ۳۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۵ گزینه ۱

$$f(x) = x|x| - ۲x = \begin{cases} x^۲ - ۲x & ; x \geq ۰ \\ -x^۲ - ۲x & ; x < ۰ \end{cases}$$

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} x \geq ۰ : f'(x) = ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ x < ۰ : f'(x) = -۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \end{cases}$$

باتوجه‌به شکل، ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع به ترتیب برابر $(-۱, ۱)$ و $(۱, -۱)$ است، پس فاصلهٔ آن‌ها از هم برابر است با:

$$\text{فاصله} : \sqrt{(-۱-۱)^۲ + (۱+۱)^۲} = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

گزینه ۱

$$f'(x) = ۱ + \frac{۴ - ۲x}{۲\sqrt{۴x - x^۲}} = ۰$$

$$\Rightarrow -\frac{۲ - x}{\sqrt{۴x - x^۲}} = ۱ \Rightarrow \sqrt{۴x - x^۲} = x - ۲ \quad (*)$$

باتوجه‌به معادله باید $x - ۲ \geq ۰$ باشد، یعنی: $x \geq ۲$

حال معادلهٔ (*) را حل می‌کنیم. ابتدا به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۴x - x^۲ = x^۲ - ۴x + ۴ \Rightarrow ۲x^۲ - ۸x + ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۴x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۶ - ۸ = ۸$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{۴ + ۲\sqrt{۲}}{۲} = ۲ + \sqrt{۲} & \text{قابل‌قبول} \\ x = \dfrac{۴ - ۲\sqrt{۲}}{۲} = ۲ - \sqrt{۲} & (x \geq ۲ \text{ غیرقابل‌قبول زیرا }) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(۲ + \sqrt{۲}) = ۲ + \sqrt{۲} + \sqrt{۴(۲ + \sqrt{۲}) - (۲ + \sqrt{۲})^۲}$$

$$= ۲ + \sqrt{۲} + \sqrt{۲} = ۲ + ۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow A(۲ + \sqrt{۲}, ۲ + ۲\sqrt{۲}) \quad \text{ماکزیمم نسبی}$$

حال فاصلهٔ نقطهٔ A را از نیمساز ناحیهٔ اول یعنی $y = x$ به دست می‌آوریم:

$$x - y = ۰$$

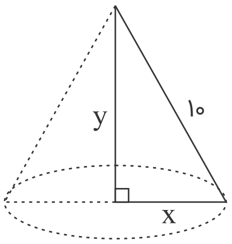
$$\Rightarrow d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۲ + \sqrt{۲} - ۲ - ۲\sqrt{۲}|}{\sqrt{۱ + ۱}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۷

گزینه ۴

در مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم x و y داریم:



$$x^۲ + y^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow x^۲ = ۱۰۰ - y^۲ \quad (*)$$

از دوران مثلث حول ضلع قائمهٔ آن، مخروط تشکیل می‌شود، بنابراین داریم:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi x^۲ y \xrightarrow{(*)} V = \frac{۱}{۳}\pi(۱۰۰ - y^۲)y = \frac{\pi}{۳}(۱۰۰y - y^۳)$$

حال برای به دست آوردن طول اضلاع قائم، از V مشتق می‌گیریم:

$$V' = \frac{\pi}{۳}(۱۰۰ - ۳y^۲) \Rightarrow \frac{\pi}{۳}(۱۰۰ - ۳y^۲) = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۰۰ - ۳y^۲ = ۰ \Rightarrow y^۲ = \frac{۱۰۰}{۳}$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۱۰۰ - y^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱۰۰ - \frac{۱۰۰}{۳} = \frac{۳۰۰ - ۱۰۰}{۳} = \frac{۲۰۰}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲}{y^۲} = \frac{\frac{۲۰۰}{۳}}{\frac{۱۰۰}{۳}} = ۲ \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۸ گزینه ۱

نقطهٔ $B(x, \sqrt{۲x+۷})$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵, ۰)$ را از نقطهٔ B محاسبه می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(x-۵)^۲ + (\sqrt{۲x+۷} - ۰)^۲}$$
$$= \sqrt{x^۲ - ۱۰x + ۲۵ + ۲x + ۷} = \sqrt{x^۲ - ۸x + ۳۲}$$

برای به دست آوردن کمترین فاصله، از AB مشتق می‌گیریم:

$$(AB)' = \frac{۲x - ۸}{۲\sqrt{x^۲ - ۸x + ۳۲}} = \frac{x - ۴}{\sqrt{x^۲ - ۸x + ۳۲}}$$
$$(AB)' = ۰ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow B(۴, \sqrt{۱۵})$$

کمترین فاصلهٔ نقطهٔ A از منحنی، برابر است با فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B. درنتیجه داریم:

$$A(۵, ۰), B(۴, \sqrt{۱۵}) \Rightarrow AB = \sqrt{(۵-۴)^۲ + (۰ - \sqrt{۱۵})^۲} = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۹ گزینه ۱

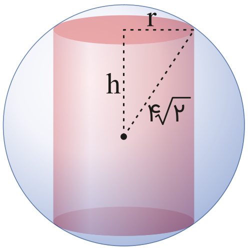
$$f'(x) = \frac{(۲x+۲)(x^۲+۱) - ۲x(x^۲+۲x-۳)}{(x^۲+۱)^۲} = ۰$$
$$\Rightarrow (۲x+۲)(x^۲+۱) - ۲x(x^۲+۲x-۳) = ۰$$
$$\Rightarrow \cancel{۲x^۳} + ۲x + ۲x^۲ + ۲ - \cancel{۲x^۳} - ۴x^۲ + ۶x = ۰$$
$$\Rightarrow -۲x^۲ + ۸x + ۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow \Delta = ۲۰ \Rightarrow x = \frac{۴ \pm ۲\sqrt{۵}}{۲} = ۲ \pm \sqrt{۵}$$

x	$-\infty$		$۲-\sqrt{۵}$		$۲+\sqrt{۵}$		$+\infty$
f'		$-$		$+$		$-$	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	$-۱+\sqrt{۵}$ max	$\searrow$	

$$f(۲+\sqrt{۵}) = \frac{(۲+\sqrt{۵})^۲ + ۴ + ۲\sqrt{۵} - ۳}{(۲+\sqrt{۵})^۲ + ۱}$$
$$= \frac{۹ + ۴\sqrt{۵} + ۲\sqrt{۵} + ۱}{۹ + ۴\sqrt{۵} + ۱} = \frac{۱۰ + ۶\sqrt{۵}}{۱۰ + ۴\sqrt{۵}} = \frac{۵ + ۳\sqrt{۵}}{۵ + ۲\sqrt{۵}} \times \frac{۵ - ۲\sqrt{۵}}{۵ - ۲\sqrt{۵}} = -۱ + \sqrt{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰ گزینه ۲



$$h^{۲}+r^{۲}=۳۲ \Rightarrow h=\sqrt{۳۲-r^{۲}}$$

مساحت جانبی : $f=۲\pi r\times ۲h=۴\pi r\sqrt{۳۲-r^{۲}}=۴\pi\sqrt{۳۲r^{۲}-r^{۴}}$

$$f'=۴\pi\times\frac{۶۴r-۴r^{۳}}{۲\sqrt{۳۲r^{۲}-r^{۴}}}=۰\ \begin{cases} r=۰ & \text{غلط} \\ r=۴ & \text{درست}\end{cases}$$

اگر $r=۴$ باشد $h=۴$ است.

$$\max(S)=۴\pi(۴)(۴)=۶۴\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۱ گزینه ۳

$$A \text{ نقطه} : (a,a^{۲})$$
$$A' \text{ نقطه} : (a^{۲},a)$$
$$y=x \text{ با } f \text{ تقاطع} \Rightarrow x^{۲}=x \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۱\end{cases} \Rightarrow a\in(۰,۱)$$
$$AA'=\sqrt{(a^{۲}-a)^{۲}+(a-a^{۲})^{۲}}=\sqrt{۲}\,|a^{۲}-a|$$
$$\xrightarrow{a\in(۰,۱)}\sqrt{۲}\left(a-a^{۲}\right)=-\sqrt{۲}a^{۲}+\sqrt{۲}a$$
$$\xrightarrow{\max}\frac{-\Delta}{۴a}=-\frac{\sqrt{۲}^{۲}-۰}{۴\left(-\sqrt{۲}\right)}=\frac{۲}{-۴\sqrt{۲}}=-\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}=-\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

چون طول پاره‌خط مدنظر است، پس مثبت درنظر می‌گیریم.

تذکر: با استفاده از مشتق AA' نیز می‌توان به جواب رسید.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۲ گزینه ۲

$$g(x) = \frac{x^{۲}(x^{۲} - ۴)}{x^{۲} - ۱} = \frac{x^{۴} - ۴x^{۲}}{x^{۲} - ۱}$$

$$g'(x) = \frac{(۴x^{۳} - ۸x)(x^{۲} - ۱) - ۲x(x^{۴} - ۴x^{۲})}{(x^{۲} - ۱)^{۲}}$$

$$= \frac{۲x[(۲x^{۲} - ۴)(x^{۲} - ۱) - x^{۴} + ۴x^{۲}]}{(x^{۲} - ۱)^{۲}} = \frac{۲x(x^{۴} - ۲x^{۲} + ۴)}{(x^{۲} - ۱)^{۲}}$$

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & ; |x| \geq ۲ \\ -g(x) & ; |x| < ۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} g'(x) & ; |x| > ۲ \\ -g'(x) & ; |x| < ۲ \end{cases}$$

تابع f' در سه نقطهٔ $x = ۲$، $x = -۲$ و $x = ۰$ تغییر علامت می‌دهد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۳ گزینه ۲

نقاط بحرانی تابع $f(x) = x|۳ - x^{۲}|$ را حساب می‌کنیم:

$$۳ - x^{۲} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{۳} \in D \\ x = -\sqrt{۳} \notin D \end{cases}$$

$$(x(۳ - x^{۲}))' = ۰ \Rightarrow (۳x - x^{۳})' = ۰ \Rightarrow ۳ - ۳x^{۲} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \in D \\ x = -۱ \in D \end{cases}$$

پس مجموعه نقاط بحرانی $\{-۱, ۱, \sqrt{۳}, -۱/۵\}$ خواهد بود.

$$f(۱) = ۲ \ , \ f(-۱) = -۲ \ , \ f(\sqrt{۳}) = ۰$$

$$f(-۱/۵) = f(-\frac{۳}{۲}) = -\frac{۳}{۲}|۳ - \frac{۹}{۴}| = \frac{-۳}{۲} \times \frac{۳}{۴} = \frac{-۹}{۸}$$

کمترین مقدار تابع -۲ خواهد بود.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۴ گزینه ۲

نقطهٔ A را $A(x,\ \sqrt[3]{-x})$ با فرض $x \in [0, 1]$ در نظر می‌گیریم، دراین‌صورت $A'(\sqrt[3]{x}, -x)$ خواهد بود.

$$AA' = \sqrt{(x - \sqrt[3]{x})^2 \times 2} = \sqrt{2}|\underbrace{x - \sqrt[3]{x}}_{g(x)}|$$

$$g(x) = x - \sqrt[3]{x}\ ,\ \ x \in [0, 1]$$

حال بیشترین مقدار $g(x)$ را حساب می‌کنیم:

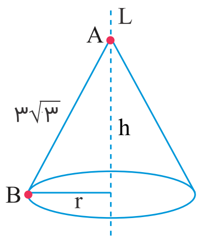
$$g'(x) = 1 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0 \Rightarrow 3\sqrt[3]{x^2} = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{27} \Rightarrow x = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$g(0) = g(1) = 0\ ,\ \ g(\frac{1}{3\sqrt{3}}) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{3\sqrt{3}}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$$

$$\max(AA') = \sqrt{2}|\frac{-2}{3\sqrt{3}}| = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{6}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۵ گزینه ۲



$$r^2 + h^2 = (3\sqrt{3})^2 = 27 \Rightarrow r^2 = 27 - h^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}(27 - h^2)h = \frac{\pi}{3}(27h - h^3)$$

$$V' = 0 \Rightarrow 27 - 3h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۶ گزینه ۲

$$f(0)=4 \Rightarrow c=4$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(0)=0 \Rightarrow b=0 \\ f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+2ax=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\dfrac{2a}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$f(-\frac{2a}{3})=0 \Rightarrow (-\frac{2a}{3})^3+a(-\frac{2a}{3})^2+4=0$$

$$-\frac{8a^3}{27}+\frac{4a^3}{9}+4=0 \Rightarrow \frac{4a^3}{27}=-4 \Rightarrow a^3=-27$$

$$\Rightarrow a=-3 \Rightarrow x_{min}=-\frac{2a}{3}=2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۷ گزینه ۱

ریشه‌های مشتق تابع باید ۲- و صفر باشد.

$$y'=3x^2+2ax-2b$$

پس:

$$\xrightarrow{(0,0)} b=0$$

$$\xrightarrow{(-2,0)} 3(-2)^2+2a(-2)=0 \Rightarrow 12-4a=0 \Rightarrow a=3$$

حال ریشه‌های مشتق را در تابع اصلی جایگذاری می‌کنیم:

$$y=x^3+3x^2-4$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{x=0} (0,-4) \\ \xrightarrow{x=-2} (-2,0) \end{cases} \xrightarrow{\text{فاصله}} \sqrt{(-2-0)^2+(0+4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۸ گزینه ۲

طول ضلع قاعده را a و ارتفاع را h می‌نامیم، داریم:

$$V = a^{۲}h = ۴ \Rightarrow h = \frac{۴}{a^{۲}}$$

مقدار حلب برابر $۴ah + a^{۲}$ است:

$$S = ۴ah + a^{۲} = \frac{۱۶}{a} + a^{۲}$$

مشتق می‌گیریم و برابر صفر می‌گذاریم:

$$S = \frac{۱۶}{a} + a^{۲} \Rightarrow S' = \frac{-۱۶}{a^{۲}} + ۲a = ۰ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow h = ۱$$

$$S = ۸ + ۴ = ۱۲$$

پس مقدار حلب برابر ۱۲ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱