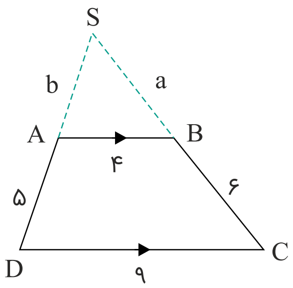
بیوگراوند
مجری عدالت آموزشی در سرزمین عزیزمان ایران
دانلود رایگان بانک تست تمام دروس تجربی در :
@BioGeravand
www.BioGeravand.ir

مدرسه: گروه آموزشی بیوگراوند	پایه: یازدهم تجربی ، دوازدهم تجربی	زمان: ۳۷ دقیقه
درس: ریاضی	مبحث: هندسه (فصل ۲ یازدهم ، فصل ۶ دوازدهم)	شماره آزمون: سری اول (سوالات کنکور)

۱ گزینه ۴

مطابق شکل، ساق‌های ذوزنقه $ABCD$ به طول اضلاع $AB = ۴$، $CD = ۹$، $AD = ۵$ و $BC = ۶$ را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در S قطع کنند.



$$AB || CD \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{SA}{SD} = \frac{SB}{SC} = \frac{AB}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{b+۵} = \frac{a}{a+۶} = \frac{۴}{۹}$$

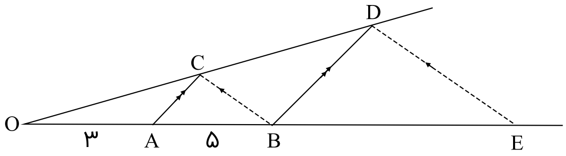
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{b+۵} = \dfrac{۴}{۹} \Rightarrow ۹b = ۴b + ۲۰ \Rightarrow b = ۴ \\ \dfrac{a}{a+۶} = \dfrac{۴}{۹} \Rightarrow ۹a = ۴a + ۲۴ \Rightarrow a = ۴/۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{SAB محیط مثلث} = ۴ + ۴/۸ + ۴ = ۱۲/۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۲ گزینه ۱

باتوجه‌به شکل و با کمک قضیهٔ تالس داریم:



$$\begin{cases} AC||BD \Rightarrow \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{OC}{CD} \\ BC||DE \Rightarrow \dfrac{OB}{BE} = \dfrac{OC}{CD} \end{cases}$$

طرف راست تساوی‌ها باهم برابر است پس طرف چپ آن نیز باهم برابر است.

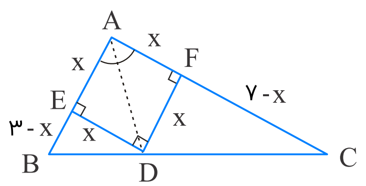
$$\Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BE} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۸}{BE} \Rightarrow BE = \frac{۴۰}{۳} = ۱۳\frac{۱}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۳ گزینه ۴

نقطهٔ D روی نیمساز قرار دارد، بنابراین از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. پس: $DE = DF$
$\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $DE = DF$، بنابراین چهار ضلعی $AEDF$ مربع است. پس: $AE||FD$
طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC، داریم:

$$\frac{FD}{AB} = \frac{FC}{AC} \Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{۷ - x}{۷} \Rightarrow ۷x = ۲۱ - ۳x \Rightarrow ۱۰x = ۲۱ \Rightarrow x = ۲/۱$$
$$\Rightarrow AD = \sqrt{۲}x = ۲/۱\sqrt{۲}$$



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۴

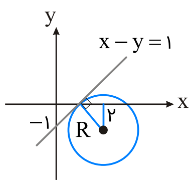
گزینه ۱

فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس بر دایره برابر با شعاع دایره است. فاصلهٔ یک نقطه با مختصات $(x_\circ, y_\circ)$ از خط به معادلهٔ $ax + by + c = \circ$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_\circ + by_\circ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R = \frac{|۲ + ۱ - ۱|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \sqrt{۲}$$

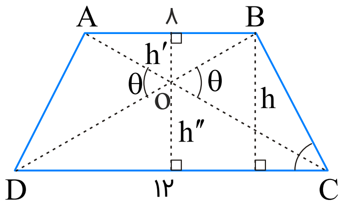


$$\text{معادلهٔ دایره} : (x - ۲)^۲ + (y + ۱)^۲ = ۲ \xrightarrow{y=\circ} (x - ۲)^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x - ۲ = ۱ \Rightarrow x = ۳ \\ x - ۲ = -۱ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۵ | گزینه ۳

دو مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ و $\overset{\Delta}{OCD}$ باهم متشابه‌اند.



$$\frac{h'}{h''}=\frac{AB}{CD}\Rightarrow\frac{h'}{h''}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow h''=\frac{۳}{۲}h'$$

$$h'+h''=۱۰\Rightarrow h'+\frac{۳}{۲}h'=۱۰\Rightarrow h'=۴\Rightarrow h''=۶$$

$$\overset{\Delta}{OAB}\sim\overset{\Delta}{OCD}\Rightarrow\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}\Rightarrow OB\times OC=OA\times OD\ (*)$$

مساحت دو مثلث $\overset{\Delta}{OBC}$ و $\overset{\Delta}{OAD}$ باهم برابرند زیرا:

$$\begin{cases}S_{\overset{\Delta}{OBC}}=\frac{۱}{۲}OB\times OC\times\sin\theta\\ S_{\overset{\Delta}{OAD}}=\frac{۱}{۲}OA\times OD\times\sin\theta\end{cases}\xrightarrow{(*)}S_{\overset{\Delta}{OBC}}=S_{\overset{\Delta}{OAD}}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABCD}}=S_{\overset{\Delta}{ODC}}+S_{\overset{\Delta}{OBC}}+S_{\overset{\Delta}{OAB}}+S_{\overset{\Delta}{OAD}}$$

$$\Rightarrow\frac{(۸+۱۲)\times۱۰}{۲}=\frac{۶\times۱۲}{۲}+\frac{۴\times۸}{۲}+۲S_{\overset{\Delta}{OBC}}$$

$$\Rightarrow۱۰۰=۳۶+۱۶+۲S_{\overset{\Delta}{OBC}}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OBC}}=\frac{۴۸}{۲}=۲۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) دایره محور xها را در دو نقطه به طول $x = ۱$ و $x = ۳$ قطع می‌کند؛ بنابراین نقاط $A\ (۱, ۰)$ و $B\ (۳, ۰)$ روی دایرهٔ موردنظر قرار دارند.

ب) مرکز دایره روی نیمساز ربع اول (خط $y = x$) است؛ بنابراین مرکز دایره را به‌صورت $O\ (\alpha, \alpha)$ در نظر می‌گیریم.

گام دوم

چون نقاط A و B روی دایره قرار دارند پس فاصلهٔ آن‌ها تا مرکز دایره باهم برابر و برابر شعاع دایره است.

$$OA = OB = R \Rightarrow \sqrt{(\alpha - ۱)^۲ + \alpha^۲} = \sqrt{(\alpha - ۳)^۲ + \alpha^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\alpha - ۱)^۲ + \alpha^۲ = (\alpha - ۳)^۲ + \alpha^۲$$

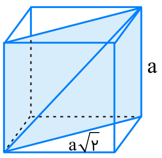
$$\Rightarrow \alpha^۲ - ۲\alpha + ۱ = \alpha^۲ - ۶\alpha + ۹ \Rightarrow ۴\alpha = ۸ \Rightarrow \alpha = ۲$$

بنابراین مرکز دایره نقطهٔ $O\ (۲, ۲)$ می‌شود و شعاع دایره برابر است با:

$$R = OA = \sqrt{(۲ - ۱)^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۱ + ۴} = \sqrt{۵}$$

۷ گزینه ۴

همان‌طوری که در شکل زیر نیز مشخص است، سطح مقطع یک مکعب به طول یال a و صفحهٔ قطری آن، مستطیلی به طول اضلاع a و $a\sqrt{۲}$ است. با توجه به مساحت مستطیل، اندازهٔ a را محاسبه می‌کنیم.



بنابراین می‌توان نوشت:

$$a\left(a\sqrt{۲}\right) = ۹\sqrt{۲} \Rightarrow a^۲\sqrt{۲} = ۹\sqrt{۲} \Rightarrow a^۲ = ۹ \Rightarrow a = ۳$$

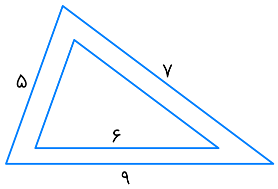
قطر مکعب به طول یال a برابر $a\sqrt{۳}$ است (با دو بار استفاده از قضیهٔ فیثاغورس ثابت می‌شود)، پس داریم:

$$a\sqrt{۳} = ۳\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۸ گزینه ۳

طبق توضیحات صورت سؤال، شکلی به‌صورت زیر رسم می‌کنیم:



چون اضلاع دو مثلث موازی یکدیگرند، پس دو مثلث متشابه هستند. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آن‌ها است؛ بنابراین داریم:

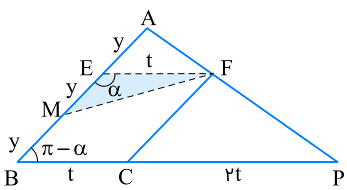
$$\frac{\text{مساحت مثلث بزرگ تر}}{\text{مساحت مثلث کوچک تر}}=\frac{S}{S'}=\left(\frac{۹}{۶}\right)^{۲}=\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۲}=\frac{۹}{۴}$$

نسبت مساحت محدود به این دو مثلث به مساحت مثلث کوچک‌تر برابر است با:

$$\frac{S-S'}{S'}=\frac{S}{S'}-\frac{S'}{S'}=\frac{S}{S'}-۱=\frac{۹}{۴}-۱=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۹ گزینه ۲



$$PC=\frac{۲}{۳}PB\Rightarrow\frac{PC}{PB}=\frac{۲}{۳}=\frac{۲t}{۳t}\Rightarrow\begin{cases}PC=۲t\\BC=t\end{cases}$$

$$EF\parallel BP\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BP}=\frac{t}{۳t}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{y}{۳y}=\frac{۱}{۳}$$

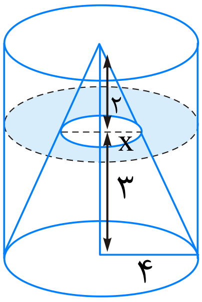
$$\Rightarrow\begin{cases}AE=y\\AB=۳y\end{cases}\Rightarrow EB=۲y\Rightarrow EM=MB=y$$

نسبت مساحت دو مثلث را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{S_{EFM}}{S_{ABP}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times EF\times EM\times\sin\alpha}{\frac{۱}{۲}\times AB\times BP\times\sin(\pi-\alpha)}=\frac{EF\times EM}{AB\times BP}=\frac{t\times y}{۳t\times ۳y}=\frac{۱}{۹}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۱۰ گزینه ۴

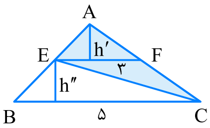


$$\text{نسبت تشابه} : \frac{x}{۴} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow x = \frac{۸}{۵}$$

$$S = \pi(۴)^۲ - \pi(\frac{۸}{۵})^۲ = ۱۶\pi - \frac{۶۴}{۲۵}\pi = \frac{۳۳۶}{۲۵}\pi = ۱۳/۴۴\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۱ گزینه ۴



$$\frac{EF}{BC} = \frac{۳}{۵}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{BEC}}}{S_{BCFE}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times ۵ \times h''}{\frac{۱}{۲} \times (۳+۵) \times h''} = \frac{۵}{۸} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{EFC}}}{S_{BCFE}} = ۱ - \frac{۵}{۸} = \frac{۳}{۸}$$

$$\text{نسبت تشابه} : \frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = (\frac{۳}{۵})^۲ = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{BCFE}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}} - S_{\overset{\triangle}{AEF}}}$$

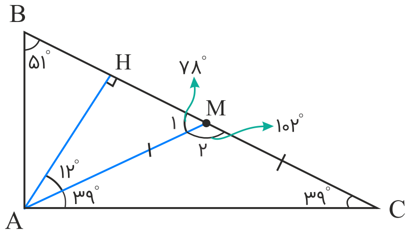
$$= \frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{\frac{۲۵}{۹}S_{\overset{\triangle}{AEF}} - S_{\overset{\triangle}{AEF}}} = \frac{۱}{\frac{۲۵}{۹} - ۱} = \frac{۱}{\frac{۱۶}{۹}} = \frac{۹}{۱۶}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AEC}}}{S_{\overset{\triangle}{BCFE}}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{EFC}}}{S_{\overset{\triangle}{BCFE}}} + \frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{BCFE}}} = \frac{۳}{۸} + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۲ گزینه ۴

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است.



بنابراین باتوجه‌به نکته مثلث AMC متساوی‌الساقین است.

$$\overset{\Delta}{AHM}\ :\ \hat{M}_1 = ۱۸۰ - (۹۰ + ۱۲) = ۷۸^\circ$$

$$\overset{\Delta}{AMC}\ :\hat{M}_۲ = ۱۸۰ - ۷۸ = ۱۰۲\ ,\ M\hat{A}C = \hat{C} = \frac{۱۸۰ - ۱۰۲}{۲} = ۳۹^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ABC}\ :\ \hat{A} = ۹۰ \Rightarrow \hat{B} = ۹۰ - ۳۹ = ۵۱^\circ$$

پس کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث ABC برابر با ۳۹ درجه است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۳ گزینه ۴

$$\sqrt{(x-۳)^۲ + (y-۶)^۲} = ۲\sqrt{x^۲ + y^۲}$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۶x + ۹ + y^۲ - ۱۲y + ۳۶ = ۴x^۲ + ۴y^۲$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ + ۳y^۲ + ۶x + ۱۲y - ۴۵ = ۰$$

$$\xrightarrow{\div ۳} x^۲ + y^۲ + ۲x + ۴y - ۱۵ = ۰$$

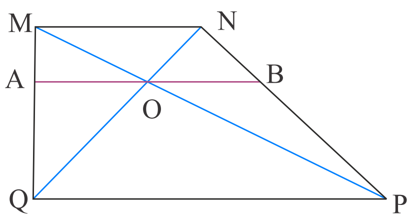
$$\Rightarrow (x+۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۲۰ \Rightarrow O(-۱, -۲)$$

معادلهٔ فوق، معادلهٔ یک دایره است که بزرگ‌ترین وتر همان قطر است:

$$r = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow ۲r = ۴\sqrt{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۴ گزینه ۲



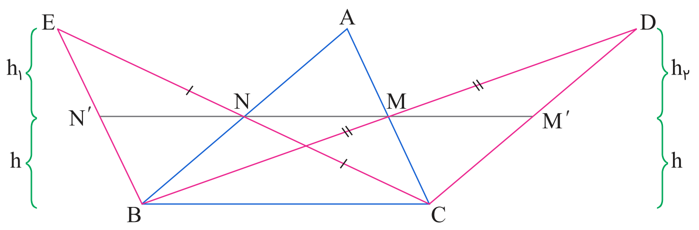
نکته: طبق قضیهٔ تالس در ذوزنقه داریم $\frac{BP}{BN}=\frac{AQ}{AM}$، سپس با ترکیب نسبت در مخرج نتیجه می‌گیریم: $\frac{BP}{PN}=\frac{AQ}{QM}$

باتوجه‌به تعمیم قضیهٔ تالس در دو مثلث QMN و PMN داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{OA}{MN}=\frac{AQ}{QM}\\[2mm] \frac{OB}{MN}=\frac{BP}{PN}\end{array}\right\}\xrightarrow{\div}\frac{OA}{OB}=\underbrace{\frac{AQ}{QM}\times\frac{PN}{BP}}_{۱}\Rightarrow\frac{OA}{OB}=۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۵ گزینه ۳



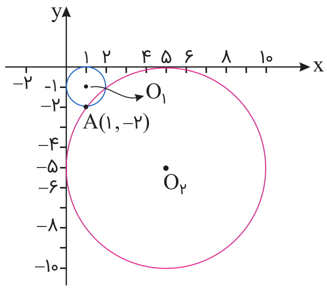
مثلث‌های DBC و EBC دارای قاعده‌های یکسان BC هستند.پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت ارتفاع‌ها است. پاره‌خط NM را از طرفین امتداد می‌دهیم تا ضلع‌های DC و EB را قطع کند.

$$\overset{\Delta}{EBC}:\frac{EN}{EC}=\frac{NN'}{BC}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{h_۱}{h+h_۱}\Rightarrow ۲h_۱=h+h_۱\Rightarrow h_۱=h$$
$$\overset{\Delta}{DBC}:\frac{DM}{DB}=\frac{MM'}{BC}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{h_۲}{h+h_۲}\Rightarrow ۲h_۲=h+h_۲\Rightarrow h_۲=h$$
$$\Rightarrow h_۱=h_۲$$

پس این دو مثلث ارتفاع‌های برابری دارند و مساحت آن‌ها باهم برابر است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۶ گزینه ۲



شکل به زیبایی به ما نشان می‌دهد که ۲تا دایره داریم که بر محورهای مختصات مماس هستند و از نقطهٔ $A(1,-2)$ می‌گذرند. به‌علاوه مرکز دایره‌ها به‌صورت $O(r,-r)$ است؛ چراکه وقتی دایره‌ای بر هر دو محور مختصات مماس است، فاصله مرکز آن تا محورها برابر با شعاع می‌شود؛ پس فهمیدیم این دایره‌ها به مرکز $O(r,-r)$ و شعاع r هستند. معادلهٔ آن‌ها به این صورت است:

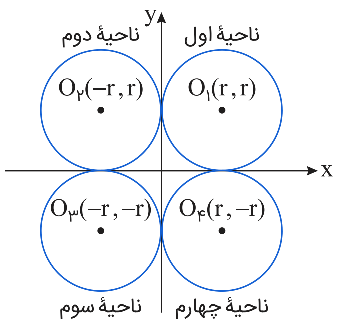
$$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2 \xrightarrow{(1,-2)} (1-r)^2+(-2+r)^2=r^2$$

$$1-2r+r^2+4-4r+r^2=r^2 \Rightarrow r^2-6r+5=0$$

$$\Rightarrow (r-1)(r-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} r=1 \\ r=5 \end{cases}$$

همان‌طوری که انتظار داشتیم، وقتی به روش جبری هم سؤال را حل کردیم، دو مقدار برای r به دست آوردیم.

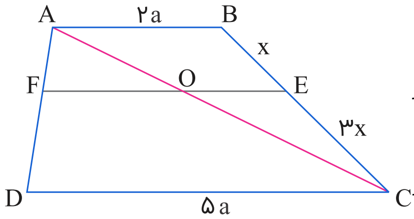
نکته: اگر دایره‌ای بر هر دو محور مختصات در ناحیه‌های اول تا چهارم مماس باشد، مختصات مرکز آن به‌صورت زیر است:



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۷ گزینه ۱

رأس A را به C وصل می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{ADC}: \frac{AF}{AD} = \frac{OF}{CD} \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \frac{OF}{۵a} \Rightarrow OF = \frac{۵}{۴}a$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \frac{CE}{CB} = \frac{OE}{۲a} \Rightarrow \frac{۳x}{۴x} = \frac{OE}{۲a} \Rightarrow OE = \frac{۳}{۲}a$$

$$EF = OF + OE = \frac{۵}{۴}a + \frac{۳}{۲}a = \frac{۱۱}{۴}a$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{CD} = \frac{\frac{۱۱}{۴}a}{۵a} = \frac{۱۱}{۲۰}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۸ گزینه ۴

فاصلهٔ کانون‌های $F'(۲, -۱)$ و $F(۲, ۷)$ برابر $۲c$ است.

$$۲c = |FF'| = |۷ - (-۱)| = ۸ \Rightarrow c = ۴$$

قطر کوچک برابر ۶ است، پس:

$$۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$$

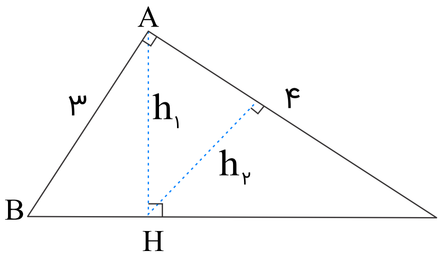
در بیضی رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است.

$$a^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow a = ۵$$

$$\text{خروج از مرکز} = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۹ گزینه ۲



$$BC = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$$

راه‌حل اول:

$$\begin{cases} \hat{C} \quad \text{مشترک} \\ A\hat{H}C = \hat{A} = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{AHC} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{h_۲}{h_۱} = \frac{AC}{BC} = \frac{۴}{۵}$$

راه‌حل دوم:

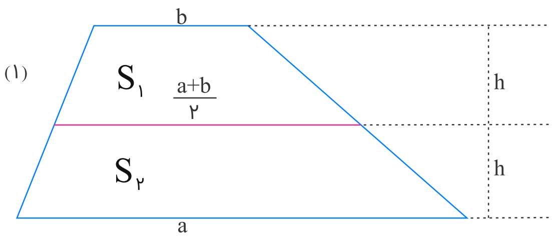
$$\overset{\Delta}{ABC} \; : \begin{cases} h_۱ \times BC = AB \times AC \Rightarrow ۵h_۱ = ۳ \times ۴ \Rightarrow h_۱ = \frac{۱۲}{۵} \\ AC^۲ = HC \times BC \Rightarrow ۱۶ = ۵HC \Rightarrow HC = \frac{۱۶}{۵} \end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{AHC} \; : h_۲ \times AC = h_۱ \times HC \Rightarrow \frac{h_۲}{h_۱} = \frac{HC}{AC} = \frac{\frac{۱۶}{۵}}{۴} = \frac{۴}{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۰ گزینه ۲

پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، برابر است با میانگین طول دو قاعده. بنابراین طول پاره‌خط وسط برابر $\frac{a+b}{۲}$ است.

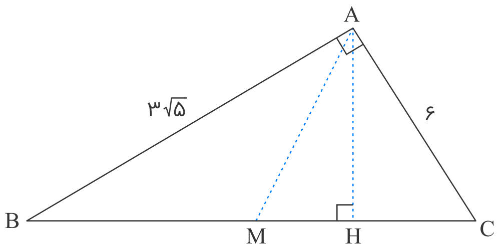


$$S_۲ = ۲S_۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}h(a + \frac{a+b}{۲}) = ۲ \times \frac{۱}{۲}h(b + \frac{a+b}{۲})$$

$$\Rightarrow \frac{۳a+b}{۲} = ۳b + a \Rightarrow ۳a + b = ۶b + ۲a \Rightarrow a = ۵b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{۱}{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۱ گزینه ۴



$$BC^{۲}=AC^{۲}+AB^{۲}\Rightarrow BC=\sqrt{۶^{۲}+(۳\sqrt{۵})^{۲}}=۹\Rightarrow MC=MB=۴/۵$$

$$\overset{\Delta}{ABC}:AB^{۲}=BH\times BC\Rightarrow ۴۵=BH\times ۹$$

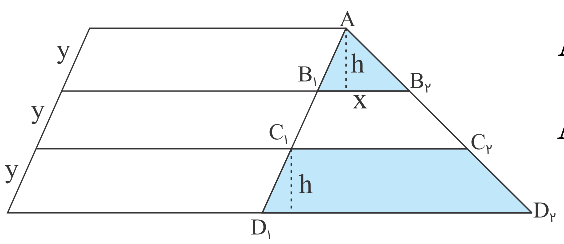
$$\Rightarrow BH=۵\Rightarrow HM=BH-MB=۵-۴/۵=۰/۵$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{AHM}}}=\frac{\frac{AH\times BC}{۲}}{\frac{AH\times HM}{۲}}=\frac{\frac{AH\times ۹}{۲}}{\frac{AH\times\frac{۱}{۲}}{۲}}=۱۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۲ گزینه ۲

فرض کنید $B_۱B_۲=x$ باشد. در این صورت داریم:



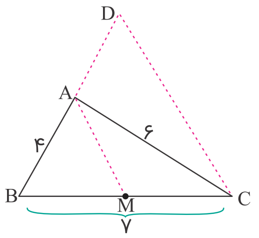
$$\overset{\Delta}{AC_۱C_۲}:\frac{AB_۱}{AC_۱}=\frac{x}{C_۱C_۲}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{x}{C_۱C_۲}\Rightarrow C_۱C_۲=۲x$$

$$\overset{\Delta}{AD_۱D_۲}:\frac{AB_۱}{AD_۱}=\frac{x}{D_۱D_۲}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{x}{D_۱D_۲}\Rightarrow D_۱D_۲=۳x$$

$$\frac{S_{AB_۱B_۲}}{S_{C_۱C_۲D_۲D_۱}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times x\times h}{\frac{۱}{۲}(۲x+۳x)h}=\frac{۱}{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۳ | گزینه ۲



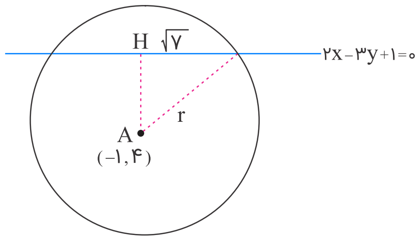
در مثلث BDC می‌دانیم $AM || CD$ است. به کمک رابطهٔ تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{۴}{BD} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow BD = ۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۴ گزینه ۱

فاصلهٔ مرکز دایره از خط برابر AH است. داریم:



$$AH = \frac{|۲(-۱) - ۳(۴) + ۱|}{\sqrt{۲^۲ + (-۳)^۲}} = \frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}} = \sqrt{۱۳}$$

همچنین می‌دانیم شعاع عمود بر وتر در دایره، وتر را نصف می‌کند. پس:

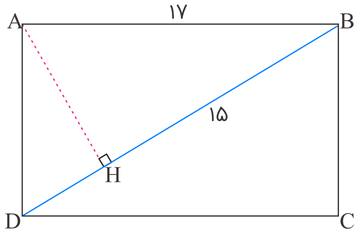
$$r^۲ = AH^۲ + \sqrt{۷}^۲ \Rightarrow r^۲ = ۱۳ + ۷ = ۲۰$$

معادلهٔ دایره را می‌نویسیم:

$$(x+۱)^۲ + (y-۴)^۲ = ۲۰ \xrightarrow{y=۲} (x+۱)^۲ + ۴ = ۲۰ \Rightarrow (x+۱)^۲ = ۱۶$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = -۵ \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۵ گزینه ۱



$$AB^۲ = BH \times BD$$

$$۱۷^۲ = ۱۵ \times BD \Rightarrow BD = \frac{۱۷^۲}{۱۵}$$

میزان اختلاف طول قطر از عدد ۱۹ را می‌خواهیم:

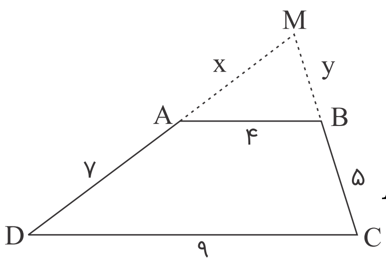
$$\frac{۱۷^۲}{۱۵} - ۱۹ = \frac{۱۷^۲ - ۱۵ \times ۱۹}{۱۵} = \frac{۲۸۹ - ۲۸۵}{۱۵} = \frac{۴}{۱۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۶ گزینه ۲

می‌دانیم در ذوزنقهٔ $ABCD$، دو قاعدهٔ AB و DC باهم موازی هستند، بنابراین طبق قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها، دو مثلث AMB و MDC متشابه هستند.

بنابراین داریم:



$$\overset{\Delta}{AMB} \sim \overset{\Delta}{MDC} \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+۷} = \frac{y}{y+۵} = \frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+۷} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹x = ۴x + ۲۸ \Rightarrow ۵x = ۲۸ \Rightarrow x = \frac{۲۸}{۵} \\ \frac{y}{y+۵} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹y = ۴y + ۲۰ \Rightarrow ۵y = ۲۰ \Rightarrow y = \frac{۲۰}{۵} = ۴ \end{cases}$$

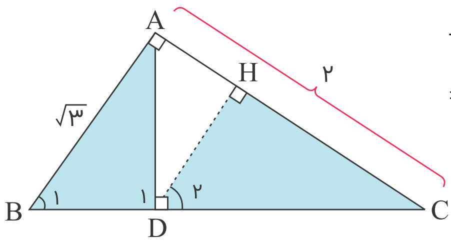
حال محیط را به دست می‌آوریم:

$$\text{محیط}\ \overset{\Delta}{AMB} = x + y + ۴ = \frac{۲۸}{۵} + ۴ + ۴ = ۸ + \frac{۲۸}{۵} = \frac{۴۰ + ۲۸}{۵} = \frac{۶۸}{۵} = ۱۳/۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۷ گزینه ۳

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم:



$$AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$$

$$\Rightarrow ۳ + ۴ = BC^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۷}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DH\,,\ \text{مورب } BC \Rightarrow \widehat{D}_۲ = \widehat{B}_۱ \\ \hat{D}_۱ = \widehat{H} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{HCD}$$

طبق روابط طولی در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ نتیجه می‌گیریم:

$$AC^۲ = BC \times CD$$

$$\Rightarrow ۴ = \sqrt{۷} \times CD \Rightarrow CD = \frac{۴}{\sqrt{۷}}$$

بنابراین نسبت تشابه دو مثلث ABD و HCD برابر است با:

$$K = \frac{\frac{۴}{\sqrt{۷}}}{\sqrt{۳}} = \frac{۴}{\sqrt{۲۱}}$$

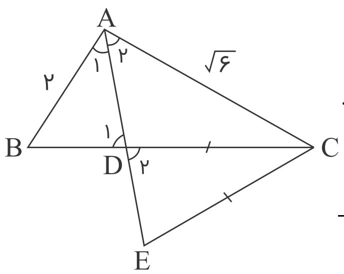
می‌دانیم که نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر است با مجذور نسبت تشابه، پس داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{HCD}}}{S_{\overset{\Delta}{ABD}}} = K^۲ = \left(\frac{۴}{\sqrt{۲۱}}\right)^۲ = \frac{۱۶}{۲۱}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۸ گزینه ۲

طبق شکل داریم:



$$\begin{cases} \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ & \text{نیمساز } AD \\ \hat{D}_۱ = \hat{D}_۲ & \text{متقابل به رأس} \end{cases} \xrightarrow{DC=CE} \hat{D}_۱ = \hat{E}$$

$$\xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{AEC} \qquad (k = \frac{AB}{AC} = \frac{۲}{\sqrt{۶}})$$

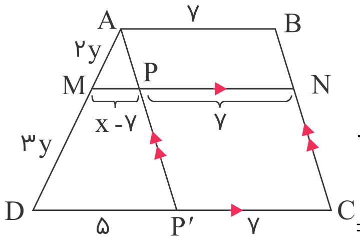
$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{ACE}}} = k^۲ = \left(\frac{۲}{\sqrt{۶}}\right)^۲ = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۹ گزینه ۳

در ذوزنقهٔ $ABCD$ از نقطهٔ A خطی موازی با خط BC رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با MN و DC به ترتیب P و P' می‌نامیم.

با استفاده از تعمیم تالس در مثلث ADP' داریم:



$$\frac{AM}{AD}=\frac{MP}{DP'}$$

$$\Rightarrow \frac{۲y}{۲y+۳y}=\frac{x-۷}{۵}\Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{x-۷}{۵}\Rightarrow x=۹=MN$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۰ گزینه ۱

معادلهٔ گستردهٔ دو دایره را از هم کم می‌کنیم تا معادلهٔ وتر مشترک به دست آید:

$$\text{وتر مشترک}:(x^۲+y^۲+۲x-۳)-(x^۲+y^۲+۲y-۳)=۰$$

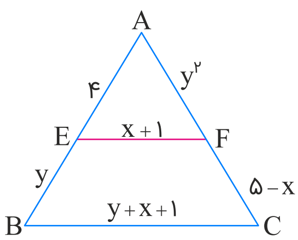
$$\Rightarrow \text{وتر مشترک}: ۲x-۲y=۰\Rightarrow \text{وتر مشترک}: x=y$$

معادلهٔ درجه اولی که از کم کردن معادلهٔ دو دایره به دست می‌آید، حتما معادلهٔ وتر مشترک است، چون هم یک معادلهٔ درجه اول است و هم (x,y) این خط در هر دو دایره صدق می‌کند.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۳۱ گزینه ۱

چون $EF \parallel BC$، طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:



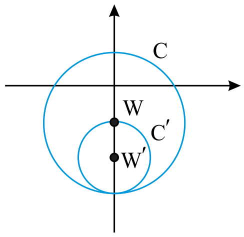
$$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow \frac{x+۱}{y+x+۱}=\frac{۴}{y+۴}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{x+۱}{y}=\frac{۴}{y}\Rightarrow x+۱=۴\Rightarrow x=۳\quad(*)$$

$$\text{تالس}:\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\xrightarrow{(*)}\frac{۴}{y}=\frac{y^۲}{۲}\Rightarrow y^۳=۸\Rightarrow y=۲\Rightarrow y-۲x=۲-۶=-۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۳۲ گزینه ۴

$$x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow W(0, -1)\,,\ r = 2$$



درواقع چون دایرهٔ بزرگ‌تر از $(0, -3)$ عبور می‌کند، پس نقطهٔ تماس همین نقطه است و همچنین $W'(0, -2)$ و $r' = 1$ خواهد بود.

$$C' : (x - 0)^2 + (y + 2)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۳۳ گزینه ۳

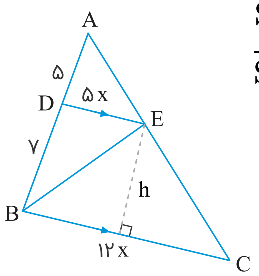
$$\Delta OCD \sim \Delta OEF \Rightarrow \frac{3}{OC} = \frac{y}{4} = \frac{1}{y} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ OC = 6 \end{cases}$$

$$\Delta OAB : \frac{y}{2x} = \frac{4}{x+4} \xrightarrow{y=2} \frac{2}{2x} = \frac{4}{x+4} \Rightarrow 4x = x + 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$\Delta OAB : \frac{y}{2x} = \frac{OC}{OC + AC} \Rightarrow \frac{2}{\frac{8}{3}} = \frac{6}{6 + AC} \Rightarrow 6 + AC = 8 \Rightarrow AC = 2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۳۴ گزینه ۴



$$\frac{S_{\overset{\Delta}{BCE}}}{S_{\overset{\Delta}{BDE}}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \times \cancel{h} \times BC}{\cancel{\frac{1}{2}} \times \cancel{h} \times DE} = \frac{BC}{DE} = \frac{12x}{5x} = \frac{12}{5} = 2/4$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۳۵ گزینه ۲

$$\begin{cases} c = ۱۲ \\ ۲b = ۱۸ \Rightarrow b = ۹ \end{cases} \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ = ۸۱ + ۱۴۴ = ۲۲۵$$

$$\Rightarrow a = ۱۵ \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{۱۲}{۱۵} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۳۶ گزینه ۲

دایرهٔ اول:

$$x^۲ + y^۲ + ۲y - ۴x = ۰ \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۵$$

$$O_۱(۲, -۱) \quad , \quad r_۱ = \sqrt{۵}$$

دایرهٔ دوم

$$x^۲ + y^۲ - ۲y = ۲ \Rightarrow x^۲ + (y-۱)^۲ = ۳$$

$$O_۲(۰, ۱) \quad , \quad r_۲ = \sqrt{۳}$$

$$O_۱O_۲ = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow O_۱O_۲ \simeq ۲/۸$$

$$r_۱ + r_۲ \simeq ۳/۹$$

$$|r_۱ - r_۲| = ۰/۵$$

$$\Rightarrow ۰/۵ < O_۱O_۲ < ۳/۹$$

پس دو دایره متقاطع‌اند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۳۷ گزینه ۴

قاعدهٔ هر دو مثلث DE است و ارتفاع هر دو یکسان است، پس مساحت‌های برابر دارند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱