منبع: کنکور سراسری

۱

گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه‌ای از x تا $x+\Delta x$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ $x=۱$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{f(۱/۲۱)-f(۱)}{۱/۲۱-۱}=\frac{\Delta y}{\Delta x}= \text{آهنگ متوسط تغییر تابع از } x_۱=۱ \text{ تا } x_۲=۱/۲۱$$

$$=\frac{\sqrt{۱/۲۱}-\sqrt{۱}}{۰/۲۱}=\frac{۱/۱-۱}{۰/۲۱}=\frac{۰/۱}{۰/۲۱}=\frac{\frac{۱}{۱۰}}{\frac{۲۱}{۱۰۰}}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x=۱$، ابتدا باید ضابطهٔ مشتق تابع را به دست آوریم:

$$f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲\sqrt{۱}}=f'(۱)= \text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در } x=۱$$

درنهایت، اختلاف آهنگ لحظه‌ای و آهنگ متوسط برابر است با:

$$f'(۱)-\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱۰}{۲۱}=\frac{۲۱-۲۰}{۴۲}=\frac{۱}{۴۲}$$

۲

گزینه ۲

ابتدا تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$(fog)(x) = \frac{۴}{۵}(۴x + |x|) - \frac{۱}{۵}|۴x + |x||$$

$$\text{اگر } x \geq ۰ \Rightarrow (fog)(x) = \frac{۴}{۵}(۵x) - \frac{۱}{۵}(۵x) = ۴x - x = ۳x$$

$$\text{اگر } x < ۰ \Rightarrow fog(x) = \frac{۴}{۵}(۴x - x) - \frac{۱}{۵}\underbrace{|۴x - x|}_{۳x}$$

$$= \frac{۱۲}{۵}x - \frac{۱}{۵}(-۳x) = \frac{۱۵}{۵}x = ۳x$$

بنابراین $(fog)(x) = ۳x$، پس:

$$(fog)'(x) = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۳

گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع از $x = ۱$ تا $x = ۱/۴۴$ را با استفاده از رابطهٔ $\frac{f(۱/۴۴) - f(۱)}{۰/۴۴}$ به دست می‌آوریم.

ب) برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x = ۱$ باید ضابطهٔ مشتق تابع یا همان $f'(x)$ و سپس $f'(۱)$ را محاسبه کنیم. اختلاف آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای به‌عنوان جواب تست در نظر گرفته می‌شود.

گام دوم

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(۱/۴۴) - f(۱)}{۰/۴۴} = \frac{\frac{۰/۴۴}{\sqrt{۱/۴۴}} - ۰}{۰/۴۴} = \frac{۱}{\sqrt{۱/۴۴}} = \frac{۱}{۱/۲} = \frac{۱}{\frac{۶}{۵}} = \frac{۵}{۶}$$

$$f(x) = \frac{x - ۱}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{۱}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} - \frac{-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{۱}{۲\sqrt{x}} + \frac{۱}{۲x\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۱) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱$$

اختلاف آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر است با:

$$۱ - \frac{۵}{۶} = \frac{۱}{۶}$$

۴ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

$f'_+(\sqrt{۲})$ مشتق راست تابع f در نقطه‌ای به طول $x=\sqrt{۲}$ و $f'_-(\sqrt{۲})$ مشتق چپ تابع f در نقطه‌ای به طول $x=\sqrt{۲}$ است.

گام دوم

ابتدا پیوستگی تابع را در نقطهٔ $\sqrt{۲}$ بررسی می‌کنیم:

$$f(\sqrt{۲}) = (\sqrt{۲})^۳ - [۲(\sqrt{۲})^۲](\sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲} - ۴\sqrt{۲} = -۲\sqrt{۲}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{۲}^+} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{۲}^+} x^۳ - [۲x^۲]x = (\sqrt{۲})^۳ - \underbrace{[۲(\sqrt{۲}^+)^۲]}_{۴+}\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲} - ۴\sqrt{۲} = -۲\sqrt{۲}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{۲}^-} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{۲}^-} x^۳ - [۲x^۲]x = (\sqrt{۲})^۳ - \underbrace{[۲(\sqrt{۲}^-)^۲]}_{۴-}\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲} - ۳\sqrt{۲} = -\sqrt{۲}$$

بنابراین تابع از سمت چپ ناپیوسته است، درنتیجه مشتق چپ وجود ندارد. مشتق راست تابع را به دست می‌آوریم:

$$x \to \sqrt{۲}^+ \Rightarrow x > \sqrt{۲} \Rightarrow x^۲ > ۲ \Rightarrow ۲x^۲ > ۴ \Rightarrow [۲x^۲] = ۴$$

$$\Rightarrow f(x) = x^۳ - ۴x \Rightarrow f'_+(x) = ۳x^۲ - ۴$$

$$\Rightarrow f'_+(\sqrt{۲}) = ۳(\sqrt{۲})^۲ - ۴ = ۳(۲) - ۴ = ۶ - ۴ = ۲$$

۵ گزینه ۱

حد داده‌شده برابر مشتق تابع $f(x)$ در $x=۲$ است، بنابراین مشتق تابع را در $x=۲$ به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = f'(۲)$$

$$f'(x) = ۳\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^۲ \times \left(\frac{-۷}{۲\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}(۲x-۳)^۲}\right)$$

$$\Rightarrow f'(۲) = ۱۲ \times \frac{-۷}{۲\times\sqrt{\frac{۲+۲}{۴-۳}}(۴-۳)^۲} = -۲۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶

گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

می‌دانیم: $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ بنابراین حاصل حد $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ برابر $f'(1)$ است.

گام دوم

کافی است مقدار مشتق تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x=1$ محاسبه کنیم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}}\times\frac{4(x+3)-(4x+5)}{(x+3)^2}$$

$$\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{4+5}{1+3}}}\times\frac{4(1+3)-(4+5)}{(1+3)^2}=\frac{1}{3}\times\frac{7}{16}=\frac{7}{48}$$

۷

گزینه ۲

وقتی $x\to 2$، صورت کسر برابر صفر می‌شود؛ اما حاصل حد وقتی $x\to 2$، مخالف صفر است بنابراین باید به ازای $x=2$ مخرج کسر هم برابر صفر شود؛ یعنی:

$$ax+b=0 \xrightarrow{x=2} 2a+b=0 \qquad (I)$$

اکنون حاصل حد $\frac{0}{0}$ و مبهم است. با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال رفع ابهام کرده و مقادیر a و b را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{ax+b}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 2}\frac{1-\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}}{a}=\frac{1-\frac{3}{2\times 2}}{a}=\frac{1-\frac{3}{4}}{a}=\frac{1}{4a}=\frac{1}{2}\Rightarrow 4a=2\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

با استفاده از رابطهٔ (I) مقدار b برابر است با:

$$2\left(\frac{1}{2}\right)+b=0\Rightarrow b+1=0\Rightarrow b=-1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۸

گزینه ۲

برای اینکه تابع در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد باید ابتدا در آن نقطه پیوسته باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{matrix} \lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x) = ۴a - ۲b + ۴ \\ \lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x) = -۸ + ۲ = -۶ \end{matrix} \Rightarrow ۴a - ۲b = -۱۰ \Rightarrow ۲a - b = -۵$$

$$f'(x) = \begin{cases} ۲ax + b & ; x > -۲ \, , f'_+(-۲) = -۴a + b \\ ۳x^۲ - ۱ & ; x < -۲ \, , f'_-(-۲) = ۱۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -۴a + b = ۱۱ \\ ۲a - b = -۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} -۲a = ۶ \Rightarrow a = -۳ \, , \, b = -۱$$

$$f(x) = \begin{cases} -۳x^۲ - x + ۴ & ; x \geq -۲ \\ x^۳ - x & ; x < -۲ \end{cases}$$

$$f(۱) = -۳ - ۱ + ۴ = ۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۹

گزینه ۲

خط $y = ۵x + a$ بر نمودار تابع $y = ۲x^۲ - ۳x + ۶$ در نقطه‌ای مماس می‌شود که شیب خط مماس برابر با ۵ باشد.

$$y = ۲x^۲ - ۳x + ۶ \Rightarrow \text{مشتق} = \text{شیب خط مماس} \Rightarrow ۴x - ۳ = ۵ \Rightarrow x = ۲$$

پس خط در نقطه‌ای به طول ۲ بر تابع مماس است. به‌علاوه خط و تابع در این نقطه برخورد دارند. اگر $x = ۲$ را در تابع قرار دهیم داریم:

$$y(۲) = ۲(۲)^۲ - ۳(۲) + ۶ = ۸ - ۶ + ۶ = ۸ \Rightarrow \text{نقطهٔ تماس} \ (۲, ۸)$$

نقطهٔ تماس در معادلهٔ خط مماس باید صدق کند:

$$y = ۵x + a \xrightarrow{(۲,۸)} ۸ = ۵(۲) + a \Rightarrow a = -۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۰ گزینه ۳

$\lim\limits_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}$ برابر $f'(۴)$ است، بنابراین برای به دست آوردن $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}$ کافی است $f'(۴)$ را محاسبه کنیم:

$$f(x)=\frac{۱+\sqrt{x}}{۵-۲x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۵-۲x)+۲(۱+\sqrt{x})}{(۵-۲x)^{۲}}$$

$$\Rightarrow f'(۴)=\frac{\frac{۱}{۴}(۵-۸)+۲(۱+۲)}{(۵-۸)^{۲}}=\frac{-\frac{۳}{۴}+۶}{۹}=\frac{۲۱}{۳۶}=\frac{۷}{۱۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۱ گزینه ۲

زمانی تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است که در $x=۲$ مشتق داشته باشد.
بنابراین باید f در $x=۲$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست آن برابر باشد.

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}f(x)\Rightarrow -۴+۲a+b=۱\Rightarrow ۲a+b=۵\quad (۱)$$

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{۱}{(x-۱)^{۲}} & ;x\geq ۲\\ -۲x+a & ;x<۲\end{cases}$$

$$f'_{-}(۲)=f'_{+}(۲)\Rightarrow -۴+a=-۱\Rightarrow a=۳$$

$$(۱):۶+b=۵\Rightarrow b=-۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۲ گزینه ۱

$$y=fog(x)\Rightarrow y'=g'(x)f'(g(x))$$

$$\xrightarrow{x=۲} y'(۲)=g'(۲)f'(g(۲))\Rightarrow ۶=g'(۲)f'(\frac{۴+۱}{۲-۱})\Rightarrow ۶=g'(۲)f'(۵)\quad (۱)$$

$$g(x)=\frac{۲x+۱}{x-۱}\Rightarrow g'(x)=\frac{۲(x-۱)-(۲x+۱)}{(x-۱)^{۲}}=\frac{-۳}{(x-۱)^{۲}}$$

$$\Rightarrow g'(۲)=-۳$$

$$(۱):۶=-۳f'(۵)\Rightarrow f'(۵)=-۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۳ گزینه ۲

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=x+\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'(2)=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

آهنگ تغییر متوسط : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{(8-\frac{1}{4})-(\frac{1}{2}-1)}{3}=\dfrac{\frac{31}{4}+\frac{1}{2}}{3}=\dfrac{11}{4}$

اختلاف : $\dfrac{11}{4}-\dfrac{9}{4}=\dfrac{2}{4}=0/5$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۴ گزینه ۳

تابع باید در $x=2$ پیوسته باشد:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{8}{ax+b}=\dfrac{8}{2a+b}\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(-x^3+6x)=-8+12=4\end{array}\right.\Rightarrow \frac{8}{2a+b}=4\Rightarrow 2a+b=2$$

مشتق چپ و راست هم باید در این نقطه برابر باشند:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-8a}{(ax+b)^2} & ;x>2\\ -3x^2+6 & ;x\le 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'_+(2)=\dfrac{-8a}{(2a+b)^2}=\dfrac{-8a}{2^2}=-2a\\ f'_-(2)=-12+6=-6\end{cases}\Rightarrow -2a=-6\Rightarrow a=3\quad ,\quad b=-4$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۵ گزینه ۲

$$f(x)=x\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}+\frac{1}{3}\times\frac{3(x+2)-(3x+1)}{(x+2)^2}\times\frac{1}{\sqrt[3]{(\frac{3x+1}{x+2})^2}}\times x$$

$$=\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}+\frac{5x}{3(x+2)^2\sqrt[3]{(\frac{3x+1}{x+2})^2}}\xrightarrow{x=-3}2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۶

گزینه ۳

شیب پاره‌خطی که ابتدا و انتهای بازه را به هم وصل می‌کند، پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۴x-۵}{x+۱}\Rightarrow\begin{cases}f(۰)=-۵\\ f(۸)=\frac{۲۷}{۹}=۳\end{cases}\Rightarrow m=\frac{۳-(-۵)}{۸-۰}=۱$$

بنابراین شیب خط مماس هم باید ۱ باشد:

$$f'(x)=\frac{۴(x+۱)-(۴x-۵)}{(x+۱)^۲}\Rightarrow\frac{۹}{(x+۱)^۲}=۱\Rightarrow(x+۱)^۲=۹$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+۱=۳\Rightarrow x=۲ & \text{ق.ق}\\ x+۱=-۳\Rightarrow x=-۴ & \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

خطی را می‌خواهیم که در $x=۲$ بر منحنی مماس است:

$$f(۲)=\frac{۳}{۳}=۱\Rightarrow(۲,۱),m=۱$$

$$y-۱=۱(x-۲)\xrightarrow{x=۰}y=-۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۷

گزینه ۳

حاصل $f'(\frac{۱}{۴})$ را می‌خواهیم:

$$f(x)=\frac{-x-۱}{\sqrt{x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۱(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(-x-۱)}{x}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{۱}{۴}}\frac{-\frac{۱}{۲}-۱(-\frac{۵}{۴})}{\frac{۱}{۴}}=\frac{-\frac{۱}{۲}+\frac{۵}{۴}}{\frac{۱}{۴}}=۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۸ گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶}=\frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۲}\frac{۰-\dfrac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}}{۱۰x-۱۸}=\lim_{x\to ۲}\frac{-۱}{(۱۰x-۱۸)\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}$$

$$=\frac{-۱}{۲\,(۴)}=\frac{-۱}{۸}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۹ گزینه ۳

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر است، هرگاه:

۱) در نقطهٔ $x=a$ پیوسته باشد.

۲) مشتق چپ و راست در نقطهٔ $x=a$ موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=\lim_{x\to(-۲)^+}f(x)=f(-۲)$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-}\sqrt{۵-۲x}=\sqrt{۵-۲(-۲)}=۳$$

$$\lim_{x\to(-۲)^+}(-\frac{۱}{۲}x^۲+bx+c)=-\frac{۱}{۲}(-۲)^۲+b(-۲)+c=-۲-۲b+c$$

$$f(-۲)=\sqrt{۵-۲(-۲)}=۳$$

$$\Rightarrow -۲-۲b+c=۳\Rightarrow -۲b+c=۵\quad(*)$$

اکنون شرط مشتق‌پذیری را بررسی می‌کنیم:

$$f'_-(-۲)=f'_+(-۲)$$

$$\begin{cases}f'_-(x)=\dfrac{-۲}{۲\sqrt{۵-۲x}}\Rightarrow f'_-(-۲)=\dfrac{-۲}{۲\times ۳}=-\dfrac{۱}{۳}\\ f'_+(x)=-x+b\Rightarrow f'_+(-۲)=۲+b\end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳}=۲+b\Rightarrow b=-\frac{۷}{۳}\xrightarrow{(*)}-۲(-\frac{۷}{۳})+c=۵$$

$$\Rightarrow c=۵-\frac{۱۴}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۰ گزینه ۴

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}+۲x}}{x^{۲}-x}\right)^{۳}=\frac{x^{۲}+۲x}{(x^{۲}-x)^{۳}}$$

سپس مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{(x^{۲}+۲x)'(x^{۲}-x)^{۳}-((x^{۲}-x)^{۳})'(x^{۲}+۲x)}{(x^{۲}-x)^{۶}}$$

$$=\frac{(۲x+۲)(x^{۲}-x)^{۳}-(۳(۲x-۱)(x^{۲}-x)^{۲})(x^{۲}+۲x)}{(x^{۲}-x)^{۶}}$$

$$f'(۲)=\frac{۶\times\cancel{۸}-۳\times۳\times۴\times\cancel{۸}}{\underset{۸}{\cancel{۶۴}}}=-\frac{۱۵}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۱ گزینه ۴

$$f(x)=\left(\frac{۲x-x^{۲}}{۳x+۵}\right)^{\frac{۲}{۳}}$$

$$f'(x)=\frac{۲}{۳}\left(\frac{۲x-x^{۲}}{۳x+۵}\right)^{\frac{-۱}{۳}}\left(\frac{(۲-۲x)(۳x+۵)-۳(۲x-x^{۲})}{(۳x+۵)^{۲}}\right)$$

$$\Rightarrow f'(-۲)=\frac{۲}{۳}\left(\frac{-۴-۴}{-۶+۵}\right)^{-\frac{۱}{۳}}\left(\frac{۶(-۱)-۳(-۴-۴)}{(-۶+۵)^{۲}}\right)$$

$$=\frac{۲}{۳}(۸)^{\frac{-۱}{۳}}(-۶+۲۴)=\frac{۲\times۱۸}{۳\sqrt[۳]{۸}}=۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۲ گزینه ۴

$$\begin{cases} f(۲) = \dfrac{۲+۲}{۲-۱} = ۴ \\ g(۲) = ۴a + ۲b \end{cases} \xrightarrow{f(۲)=g(۲)} ۴a + ۲b = ۴ \quad (۱)$$

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{x-۱-(x+۲)}{(x-۱)^۲} = \dfrac{-۳}{(x-۱)^۲} \Rightarrow f'(۲) = -۳ \\ g'(x) = ۲ax + b \Rightarrow g'(۲) = ۴a + b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f'(۲)=g'(۲)} ۴a + b = -۳ \quad (۲)$$

باتوجه‌به (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} ۴a + ۲b = ۴ \\ ۴a + b = -۳ \end{cases} \Rightarrow b = ۷$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۳ گزینه ۳

$$f(x) = \begin{cases} ax^۲ + bx + a - b & ; x \geq k \\ ۲ax + b & ; x < k \end{cases}$$

$$\lim_{x \to k} f(x) = f(k) \Rightarrow ak^۲ + bk + a - b = ۲ak + b$$

$$\Rightarrow ak^۲ + (b - ۲a)k + a - ۲b = ۰ \quad (۱)$$

$$f'(x) = \begin{cases} ۲ax + b & ; x \geq k \\ ۲a & ; x < k \end{cases}$$

$$f'_{+}(k) = f'_{-}(k) \Rightarrow ۲ak + b = ۲a \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) : ak^۲ + (۲a - ۲ak - ۲a)k + a - ۲(۲a - ۲ak) = ۰$$

$$\Rightarrow ak^۲ - ۲ak^۲ + a - ۴a + ۴ak = ۰$$

$$\Rightarrow -ak^۲ + ۴ak - ۳a = ۰ \Rightarrow -k^۲ + ۴k - ۳ = ۰ \Rightarrow k = ۱, ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲۴

گزینه ۴

می‌دانیم: $(fog(x))' = g'(x)\,f'(g(x))$

$$g(x) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲ - ۱}} \Rightarrow g'(x) = \frac{\dfrac{-۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}}{\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}} = \frac{-۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۴}}$$

$$\Rightarrow g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = \frac{-۲ \times \dfrac{۳}{\sqrt{۸}}}{۳\sqrt[۳]{(\dfrac{۹}{۸}-۱)^۴}} = \frac{\dfrac{-۶}{\sqrt{۸}}}{۳ \times \dfrac{۱}{۱۶}} = \frac{-۶ \times ۱۶}{۳\sqrt{۸}} = \frac{-۱۶}{\sqrt{۲}} = -۸\sqrt{۲}$$

$$g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{\dfrac{۹}{۸} - ۱}} = ۲$$

حال باید $f'(۲)$ را حساب کنیم. در همسایگی $x = ۲$ حاصل براکت ۴ می‌شود.

$$f(x) = ۱۶x^۲ + ۱ \Rightarrow f'(x) = ۳۲x \Rightarrow f'(۲) = ۶۴$$

$$(fog)'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = -۸\sqrt{۲} \times ۶۴ = (-۱۲۸\sqrt{۲}) \times ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲۵

گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} ax^۲ + ۵x + b & ;x \le ۲ \\ ۲ax + ۵ & ;x > ۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲ax + ۵ & ;x \le ۲ \\ ۲a & ;x > ۲ \end{cases}$$

$$f'_+(۲) = f'_-(۲) \Rightarrow ۴a + ۵ = ۲a \Rightarrow a = \frac{-۵}{۲}$$

$$f(۲) = \lim_{x \to ۲} f(x) \Rightarrow ۴a + ۱۰ + b = ۴a + ۵ \Rightarrow b = -۵$$

$$a + b = \frac{-۵}{۲} - ۵ = \frac{-۱۵}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۶ گزینه ۴

$$g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}}\Rightarrow g'(x)=\frac{۰-\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲-۱}}}{x^۲-۱}=\frac{-x}{(x^۲-۱)\sqrt{x^۲-۱}}$$

$$g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=\frac{\frac{-\sqrt{۵}}{۲}}{\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}}=-۴\sqrt{۵}$$

در حالتی که f' وجود داشته باشد، داریم:

$$f(x)=(x[x])^۳\Rightarrow f'(x)=۳(x[x])^۲[x]$$

برای همسایگی چپ $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ داریم:

$$x\to(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^-\Rightarrow g(x)=\frac{۱}{\sqrt{\frac{۵}{۴}^- -۱}}=\frac{۱}{\sqrt{(\frac{۱}{۴})^-}}=\frac{۱}{(\frac{۱}{۲})^-}=۲^+$$

$$y=(fog)(x)\Rightarrow y'=g'(x)f'(g(x))$$

برای همسایگی چپ $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ داریم:

$$y'((\frac{\sqrt{۵}}{۲})^-)=g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})f'(g(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^-)=(-۴\sqrt{۵})f'(۲^+)=(-۴\sqrt{۵})\times۳(۴)^۲\times۲=(-۴۸\sqrt{۵})(۸)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۷ گزینه ۴

راه‌حل اول: وارون تابع را حساب می‌کنیم، سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$y = \frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱} \Rightarrow y\sqrt{x} - y = \sqrt{x}+۱ \Rightarrow \sqrt{x}(y-۱) = y+۱ \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{y+۱}{y-۱}$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{y+۱}{y-۱}\right)^۲ \Rightarrow f^{-۱}(x) = \left(\frac{x+۱}{x-۱}\right)^۲ = g(x)$$

$$g'(x) = ۲\left(\frac{x+۱}{x-۱}\right) \times \frac{-۲}{(x-۱)^۲} \Rightarrow g'(۲) = ۲ \times ۳ \times \frac{-۲}{۱} = -۱۲$$

راه‌حل دوم: اگر نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر $f^{-۱}$ باشد، آنگاه متناظر با آن نقطه‌ای به عرض ۲ واقع بر f خواهد بود.

$$۲ = \frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱} \Rightarrow ۲\sqrt{x} - ۲ = \sqrt{x}+۱ \Rightarrow x = ۹$$

پس نقطهٔ $A(۹,۲)$ روی f قرار دارد.

$$f'(x) = \frac{-۲}{(\sqrt{x}-۱)^۲} \times \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۹) = \frac{-۲}{۴} \times \frac{۱}{۶} = \frac{-۱}{۱۲}$$

پس شیب خط مماس بر $f^{-۱}$ در نقطهٔ $A'(۲,۹)$ برابر ۱۲− است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۸ گزینه ۴

$$y' = \frac{(۲x+m)(x+۳) - (x^۲+mx+۱)}{(x+۳)^۲}$$

$$\Rightarrow y'(۱) = \frac{(۲+m)(۴) - (m+۲)}{۱۶} = \frac{۳m+۶}{۱۶} \quad (۱)$$

$$۴y - ۳x = n \Rightarrow y = \frac{۳}{۴}x + \frac{n}{۴} \Rightarrow y'(۱) = \frac{۳}{۴} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{۳m+۶}{۱۶} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow ۳m+۶ = ۱۲ \Rightarrow ۳m = ۶ \Rightarrow m = ۲$$

$$y(۱) = \frac{m+۲}{۴} \xrightarrow{m=۲} y(۱) = ۱$$

$$y - ۱ = \frac{۳}{۴}(x-۱) \Rightarrow ۴y - ۳x = ۱ \Rightarrow n = ۱$$

$$\Rightarrow m+n = ۲+۱ = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۲۹ گزینه ۳

$x = ۱$، عرض دو تابع را مقدار یکسانی قرار می‌دهد:

$$۲ + b = \frac{۱ + a}{a + ۱} = ۱ \Rightarrow b = -۱$$

پس توابع به صورت $y = ۲x - ۱$ و $y = \frac{x + a}{ax + ۱}$ هستند و در $x = ۱$ مشتق یکسانی دارند.

$$y' = ۲$$

$$y' = \frac{۱ - a^۲}{(ax + ۱)^۲} \xrightarrow{x=۱} \frac{۱ - a^۲}{(a + ۱)^۲}$$

حال داریم:

$$\frac{۱ - a^۲}{(a + ۱)^۲} = ۲ \Rightarrow \frac{۱ - a}{(a + ۱)} = ۲$$

$$\Rightarrow ۲a + ۲ = ۱ - a \Rightarrow ۳a = -۱ \Rightarrow a = \frac{-۱}{۳}$$

$$a - b = -\frac{۱}{۳} + ۱ = \frac{۲}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۳۰ گزینه ۲

$$\lim_{x \to ۱} \frac{۲f(x) - ۱}{۲(x - ۱)} = \lim_{x \to ۱} \frac{۲(\frac{۱}{۲}) - ۱}{۲(۱ - ۱)} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \to ۱} \frac{۲f'(x)}{۲} = \lim_{x \to ۱} f'(x)$$

$$f(x) = \frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{۲x^۲ + x - ۱} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = \frac{\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}(۲x^۲ + x - ۱) - (۴x + ۱)(x^{\frac{۳}{۲}})}{(۲x^۲ + x - ۱)^۲}$$

$$\xrightarrow{x=۱} f'(۱) = \frac{\frac{۳}{۲}(۲ + ۱ - ۱) - (۴ + ۱)(۱)}{(۲ + ۱ - ۱)^۲} = \frac{-۲}{۴} = \frac{-۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱