مدرسه	گروه آموزشی بیوگراوند
پایه	یازدهم تجربی ، دوازدهم تجربی
زمان	۳۵ دقیقه
درس	ریاضی
مبحث	حد بی نهایت و حد در بی نهایت
شماره آزمون	سری اول (سوالات کنکور)

۱ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) می‌دانیم وقتی $x \to \infty$ هم‌ارزی زیر برقرار است:

$$\sqrt{ax^۲+bx+c} \underset{x\to\infty}{\sim} \sqrt{a}|x+\frac{b}{۲a}|$$

ب) صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است و حاصل حد تابع در بی‌نهایت برابر با یک عدد ثابت شده است؛ بنابراین بزرگ‌ترین درجهٔ صورت و بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج کسر باهم برابر است.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، عبارت رادیکالی مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{۴x^۲+۱۵x} \underset{x\to-\infty}{\sim} \sqrt{۴}|x+\frac{۱۵}{۸}| = -۲(x+\frac{۱۵}{۸})$$

(دقت کنید که چون $x \to -\infty$ بود، قرینهٔ عبارت درون قدر مطلق از آن خارج شد)

باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، $n = ۱$ است. داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+۱۵}{۳x-(-۲(x+\frac{۱۵}{۸}))} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+۱۵}{۳x+۲x+\frac{۱۵}{۴}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+۱۵}{۵x+\frac{۱۵}{۴}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax}{۵x} = \frac{a}{۵}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -۱ \Rightarrow \frac{a}{۵} = -۱ \Rightarrow a = -۵$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $f(x)$ برابر است با:

$$f(x) = \frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}$$

اکنون حاصل حد تابع $f(x)$ را وقتی $x \to ۳$ به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to۳} f(x) = \lim_{x\to۳} \frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}} = \frac{۰}{۰}$$

با دو روش می‌توان ابهام به‌وجودآمده را رفع کرد.

روش اول:

با به‌کاربردن قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to۳} \frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}} = \lim_{x\to۳} \frac{-۵}{۳-\frac{۸x+۱۵}{۲\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}} = \frac{-۵}{۳-\frac{۲۴+۱۵}{۲\sqrt{۳۶+۴۵}}}$$

$$= \frac{-۵}{۳ - \frac{۳۹}{۱۸}} = \frac{-۵}{\frac{۱۵}{۱۸}} = \frac{-۵}{\frac{۵}{۶}} = -۶ \Rightarrow \lim_{x \to ۳} f(x) = -۶$$

روش دوم:

با ضرب صورت و مخرج در مزدوج مخرج، داریم:

$$\lim_{x \to ۳} \frac{-۵x + ۱۵}{۳x - \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x}} \times \frac{۳x + \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x}}{۳x + \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x}} = \lim_{x \to ۳} \frac{-۵(x - ۳)(۳x + \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x})}{۹x^۲ - ۴x^۲ - ۱۵x}$$

$$= \lim_{x \to ۳} \frac{-۵(x - ۳)(۳x + \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x})}{۵x(x - ۳)} = \lim_{x \to ۳} - \frac{۳x + \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x}}{x} = -\frac{۹ + ۹}{۳} = -\frac{۱۸}{۳} = -۶$$

۲

گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی یک بازه پیوسته است هرگاه در همهٔ نقاط این بازه پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_۰$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_۰^+} f(x) = \lim_{x \to x_۰^-} f(x) = f(x_۰)$$

گام دوم

تابع $f(x)$ با ضابطهٔ داده‌شده روی بازهٔ $[۱, +\infty)$ تعریف شده است. برای بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ روی این بازه کافی است شرط پیوستگی تابع فقط در نقطهٔ $x = ۶$ بررسی شود. داریم:

$$\lim_{x \to ۶^-} f(x) = \lim_{x \to ۶^-} \sin \frac{\pi}{x} = \sin \frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$f(۶) = \sin \frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x \to ۶^+} f(x) = \lim_{x \to ۶^+} a + \cos^۲ \frac{\pi x}{۳۶} = a + \cos^۲ \frac{\pi}{۶} = a + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲ = a + \frac{۳}{۴}$$

برای پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۶$ کافی است تساوی زیر برقرار باشد:

$$a + \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۴}$$

۳ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) در تابع $f(x)$ وقتی $x \to +\infty$ حد تابع برابر $-\frac{1}{2}$ است. چون حاصل حد وقتی $x \to +\infty$ یک عدد شده است، پس بزرگ‌ترین درجهٔ صورت کسر با بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج کسر باید برابر باشد. بزرگ‌ترین درجهٔ x در صورت کسر ۱ است، پس $n = 1$ است.

ب) حاصل حد را وقتی‌که $x \to +\infty$ با استفاده از هم‌ارزی $\sqrt{ax^2+bx+c} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{a}|x+\frac{b}{2a}|$ تعیین کرده و مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

$$n = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{ax-6}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{ax-6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sqrt{1}|x+(\frac{-3}{2})|}{ax-6}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+x-\frac{3}{2}}{ax-6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-\frac{3}{2}}{ax-6} = \frac{3}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -6$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{-6x-6}$$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{-6x-6} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب کرده و حاصل را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-1} \frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{-6x-6} \times \frac{2x-\sqrt{x^2-3x}}{2x-\sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x\to-1} \frac{4x^2-x^2+3x}{-6(x+1)(2x-\sqrt{x^2-3x})}$$

$$= \lim_{x\to-1} \frac{3x(x+1)}{-6(x+1)(2x-\sqrt{x^2-3x})} = \lim_{x\to-1} \frac{3x}{-6(2x-\sqrt{x^2-3x})}$$

$$= \frac{-3}{-6(-2-2)} = \frac{-3}{(-6)(-4)} = \frac{-3}{24} = \frac{-1}{8}$$

۴ گزینه ۲

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^3-(x+1)^3}{x(x-1)^2-x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-3x^2+3x-1-(x^3+3x^2+3x+1)}{x(x^2-2x+1)-x^3}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-6x^2}{-2x^2} = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۵ گزینه ۱

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x} & ;x\neq ۰\\ a & ;x=۰\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}-۱)}{۱-\cos^۲ x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}-۱)}{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}-۱)}{(۱-\sqrt{\cos x})(۱+\sqrt{\cos x})(۱+\cos x)}=-\frac{۱}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶ گزینه ۲

حد تابع در بی‌نهایت را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+\sqrt{۴x^۲}}{۲x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(a+۲)}{۲x}$$

$$\xrightarrow{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{۵}{۲}}\frac{a+۲}{۲}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow a=۳$$

$$\lim_{x\to-۱}f(x)=\lim_{x\to-۱}\frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}\xrightarrow[\text{ضرب و تقسیم می‌کنیم}]{\text{در مزدوج صورت}}\lim_{x\to-۱}\frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}\times\frac{۳x-\sqrt{۴x^۲+۵}}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۵}}$$

$$=\lim_{x\to-۱}\frac{۹x^۲-۴x^۲-۵}{۲(x+۱)(-۳-\sqrt{۴+۵})}=\lim_{x\to-۱}\frac{-۵(x-۱)(x+۱)}{۱۲(x+۱)}=\frac{۵}{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۷ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

تابع در $x=۰$ پیوسته است؛ بنابراین $\lim\limits_{x\to ۰}f(x)=f(۰)$ است.

گام دوم

$$f(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{x}{۱-\sqrt{۱-x}}=\lim_{x\to ۰}\frac{x}{۱-\sqrt{۱-x}}\times\frac{۱+\sqrt{۱-x}}{۱+\sqrt{۱-x}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{x(۱+\sqrt{۱-x})}{(۱-\sqrt{۱-x})(۱+\sqrt{۱-x})}=\lim_{x\to ۰}\frac{x(۱+\sqrt{۱-x})}{۱-۱+x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{x(۱+\sqrt{۱-x})}{x}\Rightarrow a=۱+\sqrt{۱-۰}=۱+۱=۲\Rightarrow a=۲$$

۸ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

حاصل حد مبهم است. با استفاده از رفع ابهام عامل صفرشونده یا همان $x - ۲$، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\lim_{x\to ۲}\left(\frac{۶}{x^۲ - ۲x} - \frac{x+۱}{x-۲}\right) = \lim_{x\to ۲}\left(\frac{۶}{x(x-۲)} - \frac{x+۱}{x-۲}\right)$$

$$= \lim_{x\to ۲}\left(\frac{۶ - x^۲ - x}{x(x-۲)}\right) = \lim_{x\to ۲}\left(\frac{-(x-۲)(x+۳)}{x(x-۲)}\right)$$

$$= \lim_{x\to ۲}\frac{-(x+۳)}{x} = \frac{-۵}{۲}$$

۹ گزینه ۳

شرط پیوستگی تابع در نقطهٔ $x = ۱$ به صورت زیر است:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)$$

بنابراین داریم:

$$f(۱) = a - a + ۲ = ۲$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-}(ax - a + ۲) = a - a + ۲ = ۲$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+}\frac{x-۱}{x-\sqrt{x}} = \frac{۰}{۰}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+}\frac{x-۱}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-۱)} = \lim_{x\to ۱^+}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-۱)}(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt{x})\cancel{(\sqrt{x}-۱)}} = \frac{۲}{۱} = ۲$$

پس به ازای هر مقدار a، تابع در $x = ۱$ پیوسته است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۰

گزینه ۲

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۳^+} f(x) = a\log_۲^۴ = ۲a \\ \lim\limits_{x\to ۳^-} f(x) = ۳a+۱ \end{cases} \Rightarrow ۳a+۱=۲a \Rightarrow a=-۱$$

$$x<۳:\ f(x)=ax+۲^{x-۳}=-x+۲^{x-۳}$$

$$f(۲)=-۲+۲^{-۱}=-۲+\frac{۱}{۲}=-۱/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۱

گزینه ۱

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{۳x^۲-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}=\lim_{x\to ۴}\frac{(۳x+۲)(x-۴)}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}\times\frac{\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱}=\lim_{x\to ۴}\frac{(۳x+۲)(x-۴)(\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱)}{(۲-\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{-(۳x+۲)\cancel{(۲-\sqrt{x})}(۲+\sqrt{x})(\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱)}{\cancel{(۲-\sqrt{x})}}=\lim_{x\to ۴}\left(-(۳x+۲)(۲+\sqrt{x})(\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱)\right)$$

$$=-۱۴\times ۴\times ۲=-۱۱۲$$

راه‌حل دوم:

$$\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to ۴}\frac{۳x^۲-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}=\lim_{x\to ۴}\frac{۶x-۱۰}{\dfrac{-\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}}{۲\sqrt{۳-\sqrt{x}}}}=\frac{۱۴}{\dfrac{-\dfrac{۱}{۲\times ۲}}{۲}}=-۱۴\times ۸=-۱۱۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۲ گزینه ۳

$$\lim_{x\to -۱} \frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}} = \frac{۰}{۰}$$

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to -۱} \frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}} \times \frac{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}$$

$$= \lim_{x\to -۱} \frac{(x+۱)(۲x+۳)(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}})}{۴-(۲+\sqrt{۳-x})}$$

$$= \lim_{x\to -۱} \frac{(x+۱)(۲x+۳)(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}})}{۲-\sqrt{۳-x}} \times \frac{۲+\sqrt{۳-x}}{۲+\sqrt{۳-x}}$$

$$= \lim_{x\to -۱} \frac{(x+۱)(۲x+۳)(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}})(۲+\sqrt{۳-x})}{۴-۳+x}$$

$$= \lim_{x\to -۱} (۲x+۳)(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}})(۲+\sqrt{۳-x}) = ۱(۲+۲)(۲+۲) = ۱۶$$

راه‌حل دوم: (فراتر از کتاب)

استفاده از قاعدهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to -۱} \frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to -۱} \frac{۴x+۵}{-\frac{-۱}{۲\sqrt{۳-x}} \times \frac{۱}{۲\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}} = \frac{۱}{\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}} = ۱۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۳ گزینه ۳

تابع در $x=۱$ پیوسته است، پس مقادیر حد چپ و راست تابع در $x=۱$ برابرند.

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \sqrt{a+۳} \quad , \quad \lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۱+a$$

$$\Rightarrow ۱+a = \sqrt{a+۳} \Rightarrow a^۲+۲a+۱ = a+۳ \Rightarrow a^۲+a-۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (a+۲)(a-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۱ & \checkmark \\ a=-۲ & \times \end{cases}$$

به ازای $a=-۲$ تساوی بالا برقرار نیست. حالا $f(-\frac{۳}{۴})$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{ax+۳} = \sqrt{x+۳}$$

$$\Rightarrow f(-\frac{۳}{۴}) = \sqrt{-\frac{۳}{۴}+۳} = \sqrt{\frac{۹}{۴}} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۴ گزینه ۱

مقدار تابع : $f(-۲) = a$

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۲)^-} \frac{۸ + x^۳}{|x+۲|} = \lim_{x\to(-۲)^-} \frac{(x+۲)(x^۲ - ۲x + ۴)}{-(x+۲)}$$

$$= -\lim_{x\to(-۲)^-} (x^۲ - ۲x + ۴) = -(۴+۴+۴) = -۱۲$$

برای پیوستگی چپ، باید $a = -۱۲$ باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۵ گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{x^۲ - ۱}{x+|x|} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{x^۲-۱}{x+x} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{x^۲ - ۱}{x+|x|} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{x^۲-۱}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف‌نشده}$$

تابع در همسایگی چپ صفر حد ندارد، بنابراین گزینهٔ ۴ درست است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۶ گزینه ۳

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to -۸} \frac{x^۲ + ۱۰x + ۱۶}{۶(۲+\sqrt[۳]{x})} = \frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to -۸} \frac{x^۲ + ۱۰x + ۱۶}{۶(۲+\sqrt[۳]{x})} = \lim_{x\to -۸} \frac{(x+۸)(x+۲)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}{۶(۲+\sqrt[۳]{x})(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}$$

$$= \lim_{x\to -۸} \frac{(x+۸)(x+۲)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}{۶(x+۸)}$$

$$= \lim_{x\to -۸} \frac{(x+۲)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}{۶} = \frac{-۶\times ۱۲}{۶} = -۱۲$$

راه‌حل دوم: (فراتر از کتاب)

با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\text{HOP}: \lim_{x\to -۸} \frac{۲x+۱۰}{۶\times \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}} = \frac{-۱۶+۱۰}{۶\times\frac{۱}{۳\times ۴}} = -۶\times ۲ = -۱۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۷ گزینه ۳

راه‌حل اول: استفاده از هم‌ارزی:

$$\sqrt{ax^۲+bx+c} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt{a}\left|x+\frac{b}{۲a}\right|$$

$$\lim_{x\to-\infty}(۲x+\sqrt{۴x^۲+x}) = \lim_{x\to-\infty}\left(۲x+۲\left|x+\frac{۱}{۸}\right|\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(۲x-۲\left(x+\frac{۱}{۸}\right)\right) = -\frac{۱}{۴}$$

راه‌حل دوم: با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}(۲x+\sqrt{۴x^۲+x}) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(۲x+\sqrt{۴x^۲+x})(۲x-\sqrt{۴x^۲+x})}{۲x-\sqrt{۴x^۲+x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{۴x^۲-(۴x^۲+x)}{۲x-\sqrt{۴x^۲}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{۲x-|۲x|} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{۴x} = -\frac{۱}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۸ گزینه ۴

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{۴x^۲+x}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-|۲x|}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x+۲x}{x} = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۹ گزینه ۴

$$\text{حد راست}: \lim_{x\to۲^+} f(x) = \lim_{x\to۲^+}\frac{x^۲-۴}{۲|x-۲|} = \lim_{x\to۲^+}\frac{(x-۲)(x+۲)}{۲(x-۲)} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to۲^-} f(x) = \lim_{x\to۲^-}\frac{x^۲-۴}{-۲(x-۲)} = \lim_{x\to۲^-}\frac{x+۲}{-۲} = -۲$$

$$f(۲) = ۲$$

$$\Rightarrow f(۲) = \lim_{x\to۲^+} f(x)$$

پس تابع فقط از راست پیوسته است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۰ گزینه ۱

می‌دانیم $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ و $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ و $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$. حال داریم:

$$\lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^+}\frac{\sin x}{۱+۲\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+۲(-\frac{۱}{۲})^-}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^-}\frac{\sin x}{۱+۲\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+۲(-\frac{۱}{۲})^+}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{۴\pi}{۳}^\pm}\frac{\sin x}{۱+۲\cos x}=\frac{\frac{-\sqrt{۳}}{۲}}{۱+۲(-\frac{۱}{۲})^\pm}=\frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^\pm}=\pm\infty$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۱ گزینه ۳

$$\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{[x]+۳}{x+۲}=\frac{\overbrace{[(-۲)^-]}^{-۳}+۳}{(-۲)^-+۲}=\frac{۰}{۰^-}=۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۲ گزینه ۱

با استفاده از قاعدۀ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax-\sqrt[۳]{x^{۲}-۱}}{۴x^{n}-۱۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{۴x^{n}}=\frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow n=۱\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{ax}{۴x}=\frac{a}{۴}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow a=\frac{۲}{۳}$$

$$\lim_{x\to ۳}f(x)=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۲}{۳}x-\sqrt[۳]{x^{۲}-۱}}{۴x-۱۲}=\frac{۰}{۰}$$

حال حد را رفع ابهام می‌کنیم:

روش اول:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۲}{۳}x-\sqrt[۳]{x^{۲}-۱}}{۴x-۱۲}\times\frac{\frac{۴}{۹}x^{۲}+\frac{۲}{۳}x\sqrt[۳]{x^{۲}-۱}+(\sqrt[۳]{x^{۲}-۱})^{۲}}{\frac{۴}{۹}x^{۲}+\frac{۲}{۳}x\sqrt[۳]{x^{۲}-۱}+(\sqrt[۳]{x^{۲}-۱})^{۲}}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۸}{۲۷}x^{۳}-x^{۲}+۱}{(۴x-۱۲)(\frac{۴}{۹}x^{۲}+\frac{۲}{۳}x\sqrt[۳]{x^{۲}-۱}+(\sqrt[۳]{x^{۲}-۱})^{۲})}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}\left(\frac{۸}{۲۷}x^{۲}-\frac{x}{۹}-\frac{۱}{۳}\right)}{۴\cancel{(x-۳)}(\frac{۴}{۹}x^{۲}+\frac{۲}{۳}x\sqrt[۳]{x^{۲}-۱}+(\sqrt[۳]{x^{۲}-۱})^{۲})}$$

$$=\frac{\frac{۸}{۳}-\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳}}{۴\times(۴+۲\times۲+۴)}=\frac{۲}{۴۸}=\frac{۱}{۲۴}$$

$$\begin{array}{l|l}
\frac{۸}{۲۷}x^{۳}-x^{۲}+۱ & \frac{x-۳}{\frac{۸}{۲۷}x^{۲}-\frac{x}{۹}-\frac{۱}{۳}} \\
\underline{-\frac{۸}{۲۷}x^{۳}+\frac{۸}{۹}x^{۲}} & \\
-\frac{۱}{۹}x^{۲}+۱ & \\
\underline{+\frac{۱}{۹}x^{۲}-\frac{۱}{۳}x} & \\
-\frac{۱}{۳}x+۱ & \\
\underline{+\frac{۱}{۳}x-۱} & \\
۰ &
\end{array}$$

روش دوم: (هوپیتال)

$$\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۲}{۳}x-\sqrt[۳]{x^{۲}-۱}}{۴x-۱۲}=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۳}(۲x)(x^{۲}-۱)^{-\frac{۲}{۳}}}{۴}$$

$$=\frac{\frac{۲}{۳}-۲\times\frac{۱}{۴}}{۴}=\frac{\frac{۴-۳}{۶}}{۴}=\frac{۱}{۲۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۳

گزینهٔ ۲

چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^{۲}-۱$ بخش‌پذیر است، بنابراین $p(x)$ به ازای ریشه‌های $x^{۲}-۱$ برابر صفر است.

$$x^{۲}-۱=۰\Rightarrow x^{۲}=۱\Rightarrow x=۱\,,-۱$$

بنابراین داریم:

$$p(۱)=۰\,,p(-۱)=۰\quad(*)$$

اکنون باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-۲$ را می‌خواهیم؛ یعنی باید $Q(۲)$ را محاسبه کنیم.

$$Q(x)=p(x-۱)+p(۱-x)$$

$$\xrightarrow{x=۲}Q(۲)=p(۲-۱)+p(۱-۲)=p(۱)+p(-۱)$$

$$\xrightarrow{(*)}Q(۲)=۰+۰=۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۴

گزینهٔ ۴

تابع در $x=\frac{\pi}{۲}$ پیوسته است، پس:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^{\pm}}f(x)=f(\frac{\pi}{۲})=a$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۲\sin^{۲}x-\sin x-۱}{\cos^{۲}x}=\frac{۰}{۰}\text{ مبهم}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۲\sin^{۲}x-\sin x-۱}{\cos^{۲}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{(۲\sin x+۱)(\sin x-۱)}{(۱-\sin^{۲}x)}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{(۲\sin x+۱)\cancel{(\sin x-۱)}}{-\cancel{(\sin x-۱)}(\sin x+۱)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(-\frac{۲\sin x+۱}{\sin x+۱})=-\frac{۳}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

گزینه ۲

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{۴x^n - ۶x^۲ + ۱}{ax^۳ + ۷x^۲ - ۲} = ۲$$

چون حاصل حد یک عدد شده است، پس باید درجهٔ صورت و مخرج کسر یکی باشد. بنابراین $n = ۳$ است. همچنین طبق قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱}{ax^۳ + ۷x^۲ - ۲} = \lim_{x\to\infty} \frac{۴x^n}{ax^۳} = \frac{۴}{a} = ۲ \Rightarrow a = ۲$$

حال $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} f(x) = \lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱}{۲x^۳ + ۷x^۲ - ۲} = \frac{۰}{۰}$$

حد را رفع ابهام می‌کنیم.

روش اول:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱}{۲x^۳ + ۷x^۲ - ۲} = \lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{\cancel{\left(x - \frac{۱}{۲}\right)}(۴x^۲ - ۴x - ۲)}{\cancel{\left(x - \frac{۱}{۲}\right)}(۲x^۲ + ۸x + ۴)} = \frac{-۳}{\frac{۱۷}{۲}} = -\frac{۶}{۱۷}$$

$$\begin{array}{r|l}
۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱ & x - \frac{۱}{۲} \\
\underline{-۴x^۳ + ۲x^۲} & \overline{۴x^۲ - ۴x - ۲} \\
-۴x^۲ + ۱ & \\
\underline{۴x^۲ - ۲x} & \\
-۲x + ۱ & \\
\underline{۲x - ۱} & \\
۰ &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
۲x^۳ + ۷x^۲ - ۲ & x - \frac{۱}{۲} \\
\underline{-۲x^۳ + x^۲} & \overline{۲x^۲ + ۸x + ۴} \\
۸x^۲ - ۲ & \\
\underline{-۸x^۲ + ۴x} & \\
۴x - ۲ & \\
\underline{-۴x + ۲} & \\
۰ &
\end{array}$$

روش دوم: هوپیتال

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱}{۲x^۳ + ۷x^۲ - ۲} = \lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{۱۲x^۲ - ۱۲x}{۶x^۲ + ۱۴x} = \frac{۳ - ۶}{\frac{۱۷}{۲}} = \frac{-۶}{۱۷}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۶ گزینه ۱

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x - ۴$ برابر ۳ است، پس $p(۴) = ۳$.

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x + ۲$ برابر ۱ است، پس $p(-۲) = ۱$.

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^۲) + ۴p(-x)$ بر $x - ۲$ را می‌خواهیم، بنابراین $x = ۲$ را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$p(x^۲) + ۴p(-x) = p(۲^۲) + ۴p(-۲)$$
$$= p(۴) + ۴p(-۲) = ۳ + ۴ \times ۱ = ۷$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۷ گزینه ۴

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{۱}{x+۱} + \frac{۱}{x}} - \sqrt{\frac{۱}{x^۲} - \frac{۱}{x^۲+۱}}\right) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x+x+۱}{x(x+۱)}} - \sqrt{\frac{x^۲+۱-x^۲}{x^۲(x^۲+۱)}}\right)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{۲x+۱}{x^۲+x}} - \sqrt{\frac{۱}{x^۴+x^۲}}\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt{\frac{۲x+۱}{x+۱}} - \sqrt{\frac{۱}{x^۳+x}}\right) = \sqrt{۲} - ۰ = \sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲۸ گزینه ۱

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{۶})^-} [۲\sin x - ۱] = [۲(\frac{۱}{۲})^-] - ۱ = -۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲۹ گزینه ۳

معادلهٔ سهمی و خط را می‌نویسیم:

$$f(x) = a(x-۰)(x-۴) = ax(x-۴)$$
$$f(۲) = ۱ \Rightarrow -۴a = ۱ \Rightarrow a = \frac{-۱}{۴}$$
$$g(x) = \frac{-x}{۴} + ۱ = \frac{-۱}{۴}(x-۴)$$

$$\lim_{x \to ۴^-} \frac{f(x)+g(x)}{۴-x} = \lim_{x \to ۴^-} \frac{-\frac{۱}{۴}x(x-۴) - \frac{۱}{۴}(x-۴)}{۴-x}$$
$$= \lim_{x \to ۴^-} \frac{-\frac{۱}{۴}(x-۴)(x+۱)}{-(x-۴)} = \lim_{x \to ۴^-} \frac{۱}{۴}(x+۱) = \frac{۵}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۳۰ گزینه ۴

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۴-x^۲+۱}+\sqrt{x^۲+۱}-x^۲}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x^۲|+|x|-x^۲}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۳۱ گزینه ۲

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to۲^+}\frac{x^۲-۴}{x^۳-[x^۳]}=\lim_{x\to۲^+}\frac{x^۲-۴}{x^۳-۸}=\frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to۲^+}\frac{x^۲-۴}{x^۳-۸}=\lim_{x\to۲^+}\frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{(x-۲)}(x^۲+۲x+۴)}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

راه‌حل دوم: (هوپیتال)

$$\lim_{x\to۲^+}\frac{x^۲-۴}{x^۳-۸}=\lim_{x\to۲^+}\frac{۲x}{۳x^۲}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۳۲ گزینه ۱

$$\lim_{x\to۰}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to۰}\frac{x(\sqrt{\frac{۲x+۱}{۵x+۹}})^۳}{x}=\lim_{x\to۰}(\sqrt{\frac{۲x+۱}{۵x+۹}})^۳=(\sqrt{\frac{۱}{۹}})^۳=\frac{۱}{۲۷}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۳۳ گزینه ۳

$$\lim_{x\to 1^+}(4-[x])g(x)=6 \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} 3g(x)=6$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} g(x)=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{|x-1|}=2$$

جواب حد یک عدد است و مخرج به ازای $x=1$ صفر است، بنابراین باید صورت کسر نیز به ازای آن صفر باشد، حال داریم:

$$ax^2+bx+c=a(x-1)^2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{a(x-1)^2}}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{a}|x-1|}{|x-1|}=2$$

$$\Rightarrow a=4$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{4}|x-1|}{|x-1|}=2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۳۴ گزینه ۴

$$x\to -1^+ \Rightarrow [x]=-1\ ,\ [-x]=0\ ,\ x+1>0 \Rightarrow |x+1|=x+1$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{|x+1|-[x]}{x-[-x]}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x+1+(-1)}{x-0}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{x}=1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۳۵ گزینه ۱

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x+2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{ax^2+x+1}}{x+2}=\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{a}|x|}{x}=\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{a}x}{x}=\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{a}=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to (-1)^-}[\frac{1}{x}]\times\sqrt{\frac{1}{4}x^2+x+1}=-1\times\sqrt{\frac{1}{4}(-1)^2+(-1)+1}=-1\times\sqrt{\frac{1}{4}}=-\frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱