مدرسه: گروه آموزشی بیوگراوند	پایه: دهم تجربی ، یازدهم تجربی	زمان: ۱۶ سوال
درس: ریاضی	مبحث: تابع و معادله درجه ۲ (فصل ۴ دهم ، فصل ۱ یازدهم)	شماره آزمون: سری اول (سوالات کنکور)

۱ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

گام اول

ریشه‌های معادلهٔ موردنظر از معکوس ریشه‌های معادلهٔ داده شده یک واحد کمتر است، بنابراین ریشه‌های آن به‌صورت $\frac{۱}{\alpha}-۱$ و $\frac{۱}{\beta}-۱$ است.

گام دوم

روابط مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را می‌نویسیم:

$$۲x^۲-۳x-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=\frac{۳}{۲}\\P=\alpha\beta=\frac{-۱}{۲}\end{cases}$$

ریشه‌های معادلهٔ موردنظر به‌صورت $\frac{۱}{\alpha}-۱$ و $\frac{۱}{\beta}-۱$ است، لذا:

$$S'=(\frac{۱}{\alpha}-۱)+(\frac{۱}{\beta}-۱)=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-۲=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{-۱}{۲}}-۲=-۵$$

$$P'=(\frac{۱}{\alpha}-۱)(\frac{۱}{\beta}-۱)=\frac{۱}{\alpha\beta}-\frac{۱}{\alpha}-\frac{۱}{\beta}+۱$$

$$=\frac{۱-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+۱=\frac{۱-\frac{۳}{۲}}{\frac{-۱}{۲}}+۱=۲$$

پس معادله به‌صورت زیر است:

$$x^۲-S'x+P'=۰\Rightarrow x^۲+۵x+۲=۰$$

۲ گزینه ۱

مجموع ضرایب معادله برابر با صفر است، بنابراین یکی از ریشه‌های این معادله $x = 1$ می‌باشد. حال معادله را تجزیه می‌کنیم تا ریشه‌های دیگر را به دست آوریم.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 & x - 1 \\ \cline{2-2} -(x^3 - x^2) & x^2 + ax + 4 \\ \cline{1-1} ax^2 + (4-a)x - 4 & \\ -(ax^2 - ax) & \\ \cline{1-1} 4x - 4 & \\ -(4x - 4) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

بنابراین داریم:

$$x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 = (x-1)(x^2 + ax + 4)$$

معادله دارای سه ریشهٔ مثبت است، درنتیجه باید معادلهٔ $x^2 + ax + 4$ دو ریشهٔ متمایز مثبت داشته باشد. پس در معادلهٔ $x^2 + ax + 4$ شرایط زیر باید برقرار باشد:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 16 > 0 \Rightarrow a < -4 \text{ یا } a > 4 \\ P = \dfrac{c}{a} > 0 \Rightarrow \dfrac{4}{1} > 0 \quad \checkmark \\ S = -\dfrac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\dfrac{a}{1} > 0 \Rightarrow a < 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} a < -4$$

همچنین ریشهٔ معادلهٔ $x^2 + ax + 4$ نباید $x = 1$ باشد $(a \neq -5)$. بنابراین مجموعه جواب برابر است با:

$$a < -4 \ , \ a \neq -5$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۳ گزینه ۴

برای اینکه تابع دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی باشد، باید سه شرط زیر برقرار باشد:

$$(m-6)x^2-2mx-3=0$$

$$1)\ \Delta>0 \Rightarrow (2m)^2-4(m-6)(-3)>0$$

$$4m^2+4(3m-18)>0$$

$$m^2+3m-18>0 \Rightarrow (m+6)(m-3)>0 \Rightarrow \begin{cases} m>3 \\ \text{یا} \\ m<-6 \end{cases}$$

$$2)\ -\frac{b}{a}<0 \Rightarrow \frac{2m}{m-6}<0 \Rightarrow 0<m<6$$

$$3)\ \frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{-3}{m-6}>0 \Rightarrow m-6<0 \Rightarrow m<6$$

اشتراک جواب‌ها : $3<m<6$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۴۰۱

۴ گزینه ۱

شرط آنکه معادلهٔ درجه دومی، ۲ ریشهٔ حقیقی مثبت داشته باشد این است که $\Delta>0$، $S=\frac{-b}{a}>0$ و $P=\frac{c}{a}>0$ باشد.

$$x^2+(m-2)x+m+1=0$$

$$S=\frac{-b}{a}=\frac{-(m-2)}{1}>0 \Rightarrow m-2<0 \Rightarrow m<2$$

$$P=\frac{c}{a}=\frac{m+1}{1}>0 \Rightarrow m>-1$$

از اشتراک دو شرط بالا $-1<m<2$ به دست می‌آید و گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ حذف می‌شوند؛ پس اصلاً نیازی به بررسی $\Delta>0$ نیست ولی ما شرط $\Delta>0$ را هم بررسی می‌کنیم:

$$\Delta>0 \Rightarrow (m-2)^2-4(m+1)>0 \Rightarrow m^2-4m+4-4m-4>0$$

$$\Rightarrow m^2-8m>0 \Rightarrow \begin{cases} m>8 \\ \text{یا} \\ m<0 \end{cases}$$

از اشتراک $-1<m<2$ با شرط بالا به این نتیجه می‌رسیم: $-1<m<0$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۵

گزینه ۱

می‌دانیم اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشد، آنگاه داریم:

$$s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \ , \ p = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است، پس داریم:

$$s = \frac{۱}{p} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{۱}{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow -\frac{۲m - ۱}{۳} = \frac{۱}{\frac{(۲ - m)}{۳}} \Rightarrow \frac{-۲m + ۱}{۳} = \frac{۳}{۲ - m}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -۴m + ۲m^۲ + ۲ - m = ۹ \Rightarrow ۲m^۲ - ۵m - ۷ = ۰$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m = -۱ \\ m = -\frac{c}{a} = \frac{۷}{۲} \end{cases}$$

طبق صورت مسئله، معادلهٔ داده‌شده دارای دو ریشهٔ حقیقی است، پس باید $\Delta > ۰$ باشد. حال مقدار m را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} m = -۱ \Rightarrow ۳x^۲ + (-۲ - ۱)x + ۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۳x + ۳ = ۰ \Rightarrow \Delta < ۰ \quad \text{غ ق ق} \\ m = \frac{۷}{۲} \Rightarrow ۳x^۲ + (۲ \times \frac{۷}{۲} - ۱)x + ۲ - \frac{۷}{۲} = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ + ۶x - \frac{۳}{۲} = ۰ \Rightarrow \Delta > ۰ \quad \text{ق ق} \end{cases}$$

بنابراین $m = \frac{۷}{۲}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۶ گزینه ۴

برای اینکه معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشهٔ مثبت باشد باید $\Delta > ۰$، $p > ۰$ و $s > ۰$ باشد، بنابراین داریم:

$$۱)\ \Delta > ۰ \Rightarrow m^{۲} - ۴ \times ۲ \times (m + ۶) = m^{۲} - ۸m - ۴۸ > ۰$$

$$\Rightarrow \underbrace{(m - ۱۲)(m + ۴)}_{p} > ۰$$

x	$-\infty$		-۴		۱۲		$+\infty$
p(x)		+ ج	۰	−	۰	+ ج	

$$\Rightarrow m < -۴ \quad \text{یا} \quad m > ۱۲$$

$$۲)\ p > ۰ \Rightarrow p = -\frac{b}{a} = \frac{-m}{۲} > ۰ \Rightarrow m < ۰$$

$$۳)\ s > ۰ \Rightarrow s = \frac{c}{a} = \frac{m + ۶}{۲} > ۰ \Rightarrow m > -۶$$

حال از حدود m در (۱)، (۲) و (۳) اشتراک می‌گیریم، درنتیجه داریم:

$$m \in (-۶, -۴)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۷

گزینه ۱

$$x^{۲} + x - ۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_{۱} + x_{۲} = -۱ \\ x_{۱}x_{۲} = -۵ \end{cases}$$

ابتدا معادله‌ای می‌سازیم که ریشه‌های آن $x_{۱} + ۱$ و $x_{۲} + ۱$ باشد برای این منظور کافی است از xها یک واحد کم کنیم:

$$(x-۱)^{۲} + (x-۱) - ۵ = ۰ \Rightarrow x^{۲} - x - ۵ = ۰$$

اگر ریشه‌ها α و β باشد:

$$(\alpha + \beta) = ۱ \quad , \quad \alpha\beta = -۵$$

حال معادله‌ای می‌سازیم که ریشه‌های آن $\frac{۱}{\alpha^{۳}}$ و $\frac{۱}{\beta^{۳}}$ باشد:

$$S_{New} = \frac{۱}{\alpha^{۳}} + \frac{۱}{\beta^{۳}} = \frac{\alpha^{۳} + \beta^{۳}}{(\alpha\beta)^{۳}} = \frac{(۱)^{۳} - ۳(۱)(-۵)}{-۱۲۵} = -\frac{۱۶}{۱۲۵}$$

$$P_{New} = \frac{۱}{\alpha^{۳}} \times \frac{۱}{\beta^{۳}} = \frac{۱}{(\alpha\beta)^{۳}} = -\frac{۱}{۱۲۵}$$

$$\Rightarrow x^{۲} - (-\frac{۱۶}{۱۲۵})x - \frac{۱}{۱۲۵} \Rightarrow ۱۲۵x^{۲} + ۱۶x - ۱ = ۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۸

گزینه ۳

$$-\frac{b}{a} = -\frac{c}{a} + ۲ \Rightarrow b = c - ۲a \Rightarrow ۲a = c - b$$
$$۲ \leq ۲a \leq ۱۸ \Rightarrow ۲ \leq c - b \leq ۱۸$$

چون $c - b$ برابر با $۲a$ است، پس عددی زوج است:

اگر $c - b = ۲$ باشد، ۷ حالت وجود دارد

اگر $c - b = ۴$ باشد، ۵ حالت وجود دارد.

اگر $c - b = ۶$ باشد، ۳ حالت وجود دارد.

اگر $c - b = ۸$ باشد، ۱ حالت وجود دارد.

پس در کل ۱۶ حالت داریم.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۹ گزینه ۴

$$\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)=2\sqrt[3]{x}$$
$$\left(\frac{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)=2\sqrt[3]{x}$$
$$\xrightarrow{\times\sqrt[3]{x^2}}\left(\underbrace{\sqrt[3]{x^4}}_{a^2}+\underbrace{\sqrt[3]{x^2}}_{ab}+\underbrace{1}_{b^2}\right)\left(\underbrace{\sqrt[3]{x^2}}_{a}-\underbrace{1}_{b}\right)=2x$$
$$\Rightarrow x^2-1=2x\Rightarrow x^2-2x-1=0$$

جمع ریشه‌ها برابر $\frac{-b}{a}$ است: $\frac{-b}{a}=2$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۰ گزینه ۳

پول علی و اکرم را به‌ترتیب x و y در نظر می‌گیریم:

$$x+y=100\Rightarrow x=100-y$$
$$(x-10)(y+10)=475\xrightarrow{x=100-y}(100-y-10)(y+10)=475$$
$$\Rightarrow y^2-80y-425=0\Rightarrow (y-85)(y+5)=0\Rightarrow\begin{cases}y=85\\y=-5\end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۱ گزینه ۳

$$|-\frac{b}{a}-(-\frac{c}{a})|=۲ \Rightarrow |-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}|=۲ \Rightarrow |c-b|=۲a \Rightarrow \begin{cases} c-b=۲a \\ \text{یا} \\ c-b=-۲a \Rightarrow b-c=۲a \end{cases}$$

ابتدا حالتی که $c-b=۲a$ باشد را بررسی می‌کنیم، حالت دوم نیز مشابه است.

چون a یک رقم طبیعی است پس $۲a$ زوج و مثبت است. حالت‌های زیر رخ می‌دهد:

۱) اگر $c-b=۲$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ وجود دارد. (۷ حالت)

۲) اگر $c-b=۴$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{۵,۶,۷,۸,۹\}$ وجود دارد. (۵ حالت)

۳) اگر $c-b=۶$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{۷,۸,۹\}$ وجود دارد. (۳ حالت)

۴) اگر $c-b=۸$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{۹\}$ وجود دارد. (۱ حالت)

بنابراین کل حالت‌ها برابر است با:

$$۲(۱+۳+۵+۷)=۲\times ۱۶=۳۲$$

تذکر: باتوجه‌به اینکه به ازای $a,b,c\in\{۱,۲,\ldots,۹\}$ دلتا همواره مثبت است، بنابراین کل حالات به‌دست‌آمده قابل‌قبول می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۲ گزینه ۳

برای yهای مثبت داریم $y=۲\sqrt{x}$ و نقاط روی آن را $N(x\,,\,۲\sqrt{x})$ در نظر می‌گیریم:

$$MN=\sqrt{(x-۳)^۲+(۲\sqrt{x}-۰)^۲}=\sqrt{x^۲-۲x+۹}$$

$$\min(MN)=\sqrt{\frac{-\Delta}{۴a}}=\sqrt{-\frac{۴-۳۶}{۴}}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۳ گزینه ۱

$$x^۲ - x - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ + x_۲ = ۱ \\ x_۱ x_۲ = -۴ \end{cases}$$

ریشه‌های معادلهٔ جدید را α و β می‌نامیم و S و P جدید می‌سازیم:

$$S_{new} = \alpha + \beta = (x_۲{}^۳ + \frac{۱}{x_۱}) + (x_۱{}^۳ + \frac{۱}{x_۲})$$
$$= (۵x_۱ + ۴ - \frac{x_۲}{۴}) + (۵x_۲ + ۴ - \frac{x_۱}{۴}) = ۸ + (۵ - \frac{۱}{۴}) \times ۱ = ۱۳ - \frac{۱}{۴} = \frac{۵۱}{۴}$$
$$P_{\ new} = (x_۲{}^۳ + \frac{۱}{x_۱})(x_۱{}^۳ + \frac{۱}{x_۲})$$
$$= (x_۱ x_۲)^۳ + x_۲{}^۲ + x_۱{}^۲ + \frac{۱}{x_۱ x_۲} = (-۴)^۳ + (۱)^۲ - ۲(-۴) + \frac{۱}{-۴}$$
$$= -۶۴ + ۱ + ۸ - \frac{۱}{۴} = -۵۵ - \frac{۱}{۴} = \frac{-۲۲۱}{۴}$$

با S و P به دست آمده معادلهٔ جدید را می‌سازیم:

$$x^۲ - Sx + P \ = ۰ \Rightarrow x^۲ - \frac{۵۱}{۴}x - \frac{۲۲۱}{۴} = ۰ \Rightarrow ۴x^۲ = ۵۱x + ۲۲۱$$

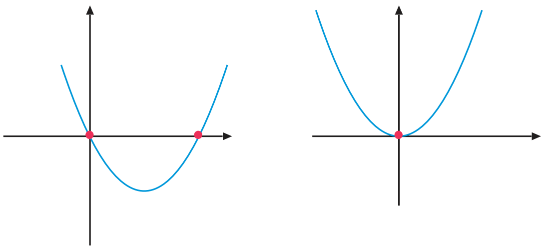
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۴ گزینه ۱

$$y = ax^۲ + (۳ + ۲a)x = x(ax + ۳ + ۲a) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ ax + ۳ + ۲a = ۰ \Rightarrow x = -\dfrac{۳ + ۲a}{a} \end{cases}$$

سهمی از ناحیهٔ سوم عبور نمی‌کند، بنابراین به‌صورت شکل‌های زیر می‌تواند باشد:



$$\text{سهمی روبه‌بالا} \Rightarrow a > ۰ \quad (*)$$

$$\text{ریشهٔ غیر صفر} > ۰ \Rightarrow -\frac{۳ + ۲a}{a} > ۰ \Rightarrow \frac{۳ + ۲a}{a} < ۰$$

$$\xrightarrow{a>۰} ۳ + ۲a < ۰ \Rightarrow a < -\frac{۳}{۲}$$

بنابراین طبق (*) برای a مقداری یافت نشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۵ گزینه ۳

ریشه‌های معادله را α و β در نظر می‌گیریم، حال داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{a}{۳} \xrightarrow{\beta=۳\alpha} \alpha + ۳\alpha = \frac{a}{۳} \Rightarrow ۴\alpha = \frac{a}{۳} \Rightarrow a = ۱۲\alpha$$

$$\alpha.\beta = \frac{۴}{۳} \xrightarrow{\beta=۳\alpha} \alpha.۳\alpha = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \alpha^۲ = \frac{۴}{۹} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{۲}{۳}$$

$$a = ۱۲\alpha = ۱۲(\pm\frac{۲}{۳}) = \pm۸ \Rightarrow ۸ - (-۸) = ۱۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۶ گزینه ۲

$$S = \frac{-(-(a^۲ + b^۲ - ۱۲))}{۱} \Rightarrow a + b = a^۲ + b^۲ - ۱۲$$

$$a + b = (a + b)^۲ - ۲ab - ۱۲ (I)$$

از طرفی : $P = \frac{a + b - ۱}{۱} \Rightarrow ab = (a + b) - ۱$

$$\xrightarrow[(I)]{\text{جایگذاری در رابطهٔ}} a + b = (a + b)^۲ - ۲(a + b) + ۲ - ۱۲$$

$$\Rightarrow (a + b)^۲ - ۳(a + b) - ۱۰ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = \frac{۳ + \sqrt{۴۹}}{۲} \Rightarrow a + b = ۵ & \text{قابل‌قبول} \checkmark \\ a + b = \frac{۳ - \sqrt{۴۹}}{۲} \Rightarrow a + b = -۲ \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱